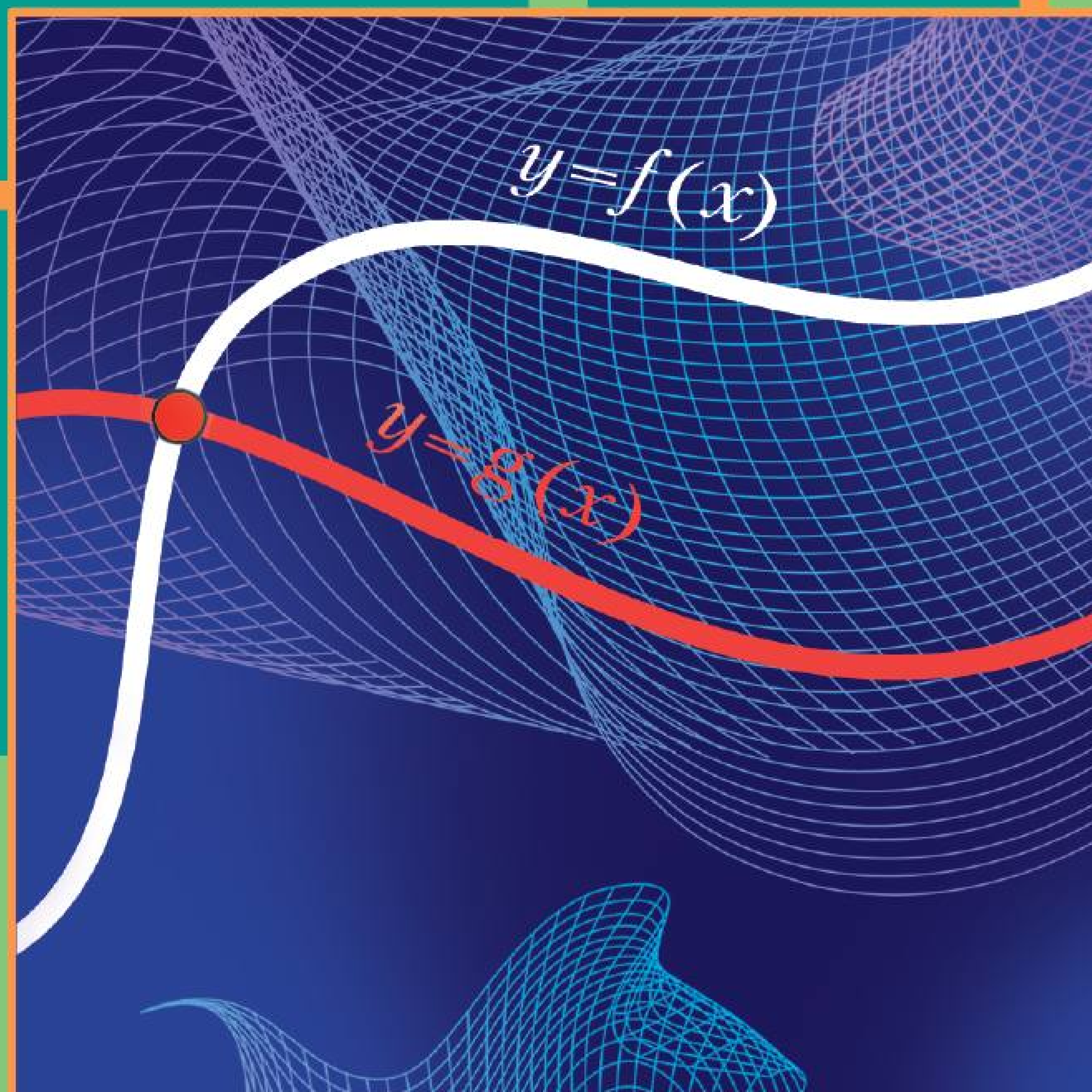
Углублённый уровень

АЛГЕБРА

7



А. Г. Мерзляк
В. М. Поляков

вентана граф

российский учебник

Алгоритм успеха

А.Г. Мерзляк
В.М. Поляков

АЛГЕБРА

7 класс

Учебник для учащихся общеобразовательных организаций

Рекомендовано Министерством образования и науки Российской Федерации

3-е издание, стереотипное

Москва
Издательский центр
«Вентана-Граф»
2019

УДК 373.167.1:512
ББК 22.141я721+22.14я721.6
М52

Учебник включён в Федеральный перечень

Мерзляк А.Г.
М52 Алгебра : 7 класс : учебник для учащихся общеобразовательных организаций / А.Г. Мерзляк, В.М. Поляков. — 3-е изд., стереотип. — М. : Вентана-Граф, 2019. — 285, [3] с. : ил. — (Российский учебник).
ISBN 978-5-360-10207-6

Учебник предназначен для углублённого изучения алгебры в 7 классе и входит в комплект учебников: «Алгебра. 7 класс», «Алгебра. 8 класс», «Алгебра. 9 класс» (авт. А.Г. Мерзляк, В.М. Поляков) системы «Алгоритм успеха».

Содержание учебника соответствует Федеральному государственному образовательному стандарту основного общего образования.

УДК 373.167.1:512
ББК 22.141я721+22.14я721.6

ISBN 978-5-360-10207-6

От авторов

Дорогие семиклассники!

Вы сделали серьёзный шаг в своей жизни: решили продолжать образование в классе с углублённым изучением математики. Мы поздравляем вас с этим выбором и надеемся, что вы не разочаруетесь в своём решении.

Учиться в математическом классе не просто. Надо быть настойчивым и увлечённым, внимательным и аккуратным, при этом самое главное — не быть безразличным к математике, а любить эту красивую науку.

Вы начинаете изучать новый школьный предмет — **алгебру**.

Алгебра — очень древняя и мудрая наука. С её азами вам предстоит познакомиться. Знать алгебру чрезвычайно важно. По-видимому, нет сегодня такой области знаний, в которой не применялись бы достижения этой науки: физики и химики, астрономы и биологи, географы и экономисты, даже языковеды и историки используют «алгебраический инструмент».

Алгебра — не только полезный, но и очень интересный предмет, развивающий сообразительность и логическое мышление. И мы надеемся, что вы в этом скоро убедитесь с помощью учебника, который держите в руках. Познакомьтесь, пожалуйста, с его структурой.

Учебник разделён на пять глав, каждая из которых состоит из параграфов. В параграфах изложен теоретический материал. Особое внимание обращайте на текст, выделенный **жирным шрифтом**. Также обращайте внимание на слова, выделенные *курсивом*.

Как правило, изложение теоретического материала завершается примерами решения задач. Эти записи можно рассматривать как один из возможных образцов оформления решения.

К каждому параграфу подобраны задачи для самостоятельного решения, к которым мы советуем приступать только после усвоения теоретического материала. Среди заданий есть как простые и средние по сложности упражнения, так и трудные задачи.

Кроме того, в учебнике вы сможете прочитать рассказы об истории алгебры.

Дерзайте! Желаем успеха!

Условные обозначения

◆ Простые задачи

◆ ◆ Задачи среднего уровня сложности

◆ ◆ ◆ Сложные задачи

Задачи высокой сложности

Окончание доказательства теоремы

Окончание решения задачи

Задачи, которые можно решать с помощью компьютера

1.7. Задания для устной работы

1.11. Задания, рекомендованные для домашней работы

§ 1 Введение в алгебру

Алгебра — это новый для вас школьный предмет. Тем не менее вы уже знакомы с «азбукой» этой науки. Так, когда вы записывали формулы и составляли уравнения, вам приходилось обозначать числа буквами, конструируя **буквенные выражения**. Например, записи a^2, $(x + y)^2$, $2(a + b)$, $\frac{x - y + z}{2}$, abc, $\frac{m}{n}$ являются буквенными выражениями.

Подчеркнём, что не всякая запись, состоящая из чисел, букв, знаков арифметических действий и скобок, является буквенным выражением. Например, запись $2x +) - ($ представляет собой бессмысленный набор символов.

Выражение, составленное из одной буквы, считают буквенным выражением.

Рассмотрим буквенное выражение $2(a + b)$. Вы знаете, что с его помощью можно найти периметр прямоугольника со сторонами a и b. Если, например, буквы a и b заменить соответственно числами 3 и 4, то получим **числовое выражение** $2(3 + 4)$. В этом случае периметр прямоугольника будет равен 14 единицам длины. Число 14 называют **значением числового выражения** $2(3 + 4)$.

Понятно, что вместо букв a и b можно подставлять и другие числа, получая каждый раз новое числовое выражение.

Поскольку буквы можно заменять произвольными числами, то эти буквы называют **переменными**, а само буквенное выражение — **выражением с переменными** (или с переменной, если она одна).

Рассмотрим выражение $2x + 3$. Если переменную x заменить, например, числом $\frac{1}{2}$, то получим числовое выражение $2 \cdot \frac{1}{2} + 3$. При этом говорят, что $\frac{1}{2}$ — **значение переменной** x, а число 4 — **значение выражения** $2x + 3$ при $x = \frac{1}{2}$.

Числовые выражения и выражения с переменными называют **алгебраическими выражениями**.

Алгебраические выражения

Числовые выражения | Выражения с переменными

Рассмотрим две группы алгебраических выражений.

I группа	II группа
$x - y^3$	$\frac{1}{x}$
$\frac{a}{4}$	$\frac{ab}{(a+b)^2}$
$\frac{1}{3}b^2 + 5a$	$\frac{m}{n+3}$
$\frac{mn}{7}$	$5 - \frac{x}{y^2}$

Выражения каждой группы содержат такие действия: сложение, вычитание, умножение, возведение в степень, деление. Однако выражения первой группы не содержат деления на выражения с переменными. Их называют **целыми выражениями**. Выражения второй группы целыми не являются.

В курсе алгебры 7 класса вы будете изучать целые выражения.

Пример. Значения переменных a, b и m таковы, что $a - b = 4$, $m = -5$. Чему равно значение выражения $7bm - 7am$?

Решение. Используя распределительное и сочетательное свойства умножения, получаем:

$7bm - 7am = 7m(b - a) = 7 \cdot (-5) \cdot (-4) = 7 \cdot 20 = 140.$

Ответ: 140. ■

?

1. Как иначе называют буквенные выражения?
2. Какие выражения называют алгебраическими?
3. Какие алгебраические выражения называют целыми?

Упражнения

1.1. Чему равно значение выражения:

1) $18\frac{5}{12} - \frac{7}{12} \cdot 1\frac{19}{21} - \frac{17}{72} \cdot \frac{2}{3}$;

2) $\left(6\frac{3}{4} - 5\frac{1}{8} : 1\frac{9}{32}\right) \cdot \frac{5}{11}$;

3) $(-1{,}42-(-3{,}22)):(-0{,}4)+(-6)\cdot(-0{,}7)$;

4) $\left(-\frac{7}{18}+\frac{11}{12}\right):\left(-\frac{19}{48}\right)$;

5) $\left(-3\frac{1}{12}-2\frac{1}{15}\right):\left(-5\frac{3}{20}\right)$?

1.2. Вычислите значение числового выражения:

1) $14\frac{7}{15}-3\frac{3}{23}\cdot\frac{23}{27}-1\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{6}$;

2) $\left(5\frac{8}{9}:1\frac{17}{36}+1\frac{1}{4}\right)\cdot\frac{5}{21}$;

3) $(-3{,}25-2{,}75):(-0{,}6)+0{,}8\cdot(-7)$;

4) $\left(-1\frac{3}{8}-2\frac{5}{12}\right):5\frac{5}{12}$.

1.3. Составьте числовое выражение и найдите его значение:

1) произведение суммы чисел -12 и 8 и числа $0{,}5$;

2) сумма произведения чисел -12 и 8 и числа $0{,}5$;

3) частное суммы и разности чисел $-1{,}6$ и $-1{,}2$;

4) квадрат суммы чисел -10 и 6;

5) сумма квадратов чисел -10 и 6.

1.4. Составьте числовое выражение и найдите его значение:

1) частное от деления суммы чисел $\frac{4}{9}$ и $-\frac{5}{6}$ на число $-\frac{14}{27}$;

2) разность произведения чисел $-1{,}5$ и 4 и числа 2;

3) произведение суммы и разности чисел $-1{,}9$ и $0{,}9$;

4) куб разности чисел 6 и 8.

1.5. Найдите значение выражения:

1) $2x-3$ при $x=4;\ 0;\ -3$;

2) $\frac{1}{3}a+\frac{1}{4}b$ при $a=-6,\ b=16$;

3) $3m-5n+3k$ при $m=-7,\ n=1{,}4,\ k=-0{,}1$.

1.6. Вычислите значение выражения:

1) $0{,}4y+1$ при $y=-0{,}5;\ 8;\ -10$;

2) $\frac{2}{7}c-0{,}2d$ при $c=-28,\ d=15$.

1.7. Какие из данных выражений являются целыми:

1) $7a+0{,}3$;

2) $5x\left(y-\frac{1}{3}\right)$;

3) $\frac{a+b}{c}$;

4) $\frac{a+b}{4}$;

5) $\frac{3m}{5}+\frac{5}{3m}$;

6) $9x-5y+\frac{1}{z}$?

1.8. Используя термины «сумма», «разность», «произведение», «частное», прочитайте алгебраические выражения и укажите, какие из них являются целыми:

1) $a-(b+c)$; 4) $2m-10$; 7) $ac+bc$;

2) $a+bc$; 5) $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}$; 8) $\frac{a}{b+4}$;

3) $x-\frac{y}{z}$; 6) $(a+b)c$; 9) $(a-b)(c+d)$.

1.9. Запишите в виде выражения:

1) число, противоположное числу a;
2) число, обратное числу a;
3) сумму чисел x и y;
4) число, обратное сумме чисел x и y;
5) сумму чисел, обратных числам x и y;
6) сумму числа a и его квадрата;
7) частное от деления числа a на число, противоположное числу b;
8) произведение суммы чисел a и b и числа, обратного числу c;
9) разность произведения чисел m и n и частного чисел p и q.

1.10. По условию задачи составьте выражения с переменными.
Карандаш стоит x р., а тетрадь — y р.
1) Сколько стоят 5 карандашей и 7 тетрадей?
2) На сколько больше надо заплатить за a тетрадей, чем за b карандашей?

1.11. По условию задачи составьте выражение с переменными.
Рабочему выдали заработную плату одной купюрой номиналом 1000 р., a купюрами номиналом 500 р. и b купюрами по 100 р. Какую сумму денег получил рабочий?

1.12. По условию задачи составьте выражение с переменными.
Из двух городов, расстояние между которыми равно 300 км, выехали одновременно навстречу друг другу два автомобиля со скоростями m км/ч и n км/ч. Через сколько часов после начала движения они встретятся?

1.13. По условию задачи составьте выражение с переменными.
Из двух сёл, расстояние между которыми равно s км, одновременно в одном направлении отправились пешеход и велосипедист. Через сколько часов после начала движения велосипедист догонит пешехода, если пешеход шёл впереди со скоростью a км/ч, а велосипедист ехал со скоростью b км/ч?
Вычислите значение полученного выражения при $a=4$, $b=12$, $s=12$.

1.14. Запишите в виде выражения:

1) утроенное произведение разности чисел a и b и их суммы;

2) сумму трёх последовательных натуральных чисел, меньшее из которых равно n;

3) произведение трёх последовательных чётных натуральных чисел, большее из которых равно $2k$;

4) число, в котором a тысяч, b сотен и c единиц;

5) количество сантиметров в x метрах и y сантиметрах;

6) количество секунд в m часах, n минутах и p секундах.

1.15. Запишите в виде выражения:

1) произведение четырёх последовательных натуральных чисел, большее из которых равно x;

2) разность произведения двух последовательных нечётных чисел и меньшего из них, если большее число равно $2k + 1$;

3) количество килограммов в a тоннах и b центнерах.

1.16. Составьте выражения для вычисления длины зелёной линии и площади фигуры, которую она ограничивает (рис. 1.1).

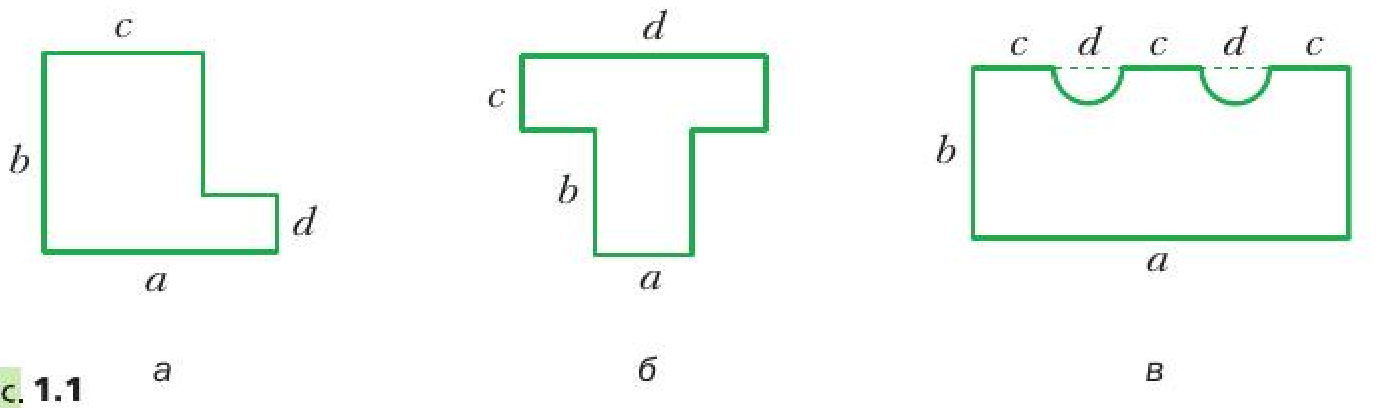


Рис. 1.1

1.17. Составьте выражения для вычисления длины зелёной линии и площади фигуры, которую она ограничивает (рис. 1.2).

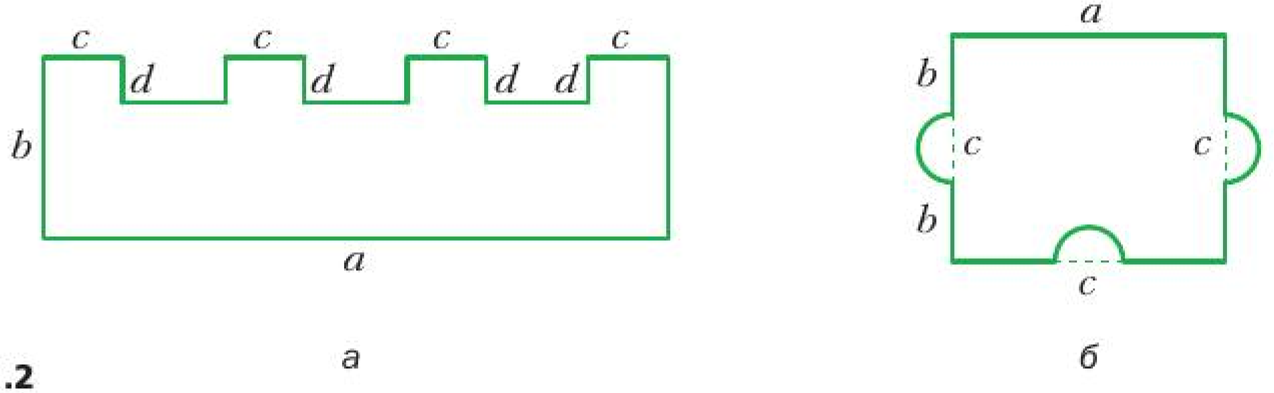


Рис. 1.2

1.18. Значения переменных a и b таковы, что $a + b = -8$, $c = 4$. Чему равно значение выражения:

1) $a + b - c$; 2) $0{,}5(a + b) + c$; 3) $3ac + 3bc$?

1.19. Значения переменных m и n таковы, что $m - n = 5$, $k = -2$. Чему равно значение выражения:

1) $(n - m)k$; 2) $2m - 2n + 3k$?

Упражнения для повторения

1.20. (*Задача из русского фольклора.*) Мельник берёт за работу $\frac{1}{10}$ смолотой муки. Сколько муки намололи крестьянину, если домой он повёз 99 пудов муки?

1.21. В столовую завезли капусту, морковь и картофель. Капусты было 64 кг, масса моркови составляла $\frac{5}{8}$ массы капусты, а масса картофеля — 180 % массы моркови. Сколько всего килограммов овощей завезли в столовую?

1.22. Известно, что a и b — натуральные числа, а число $\frac{a}{b}$ — правильная дробь. Можно ли утверждать, что:

1) $a - b > 0$; 2) $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$; 3) $\frac{b}{a} > \frac{a}{b}$?

КОГДА СДЕЛАНЫ УРОКИ

Книга о восстановлении и противопоставлении

Вы знаете основные свойства уравнений. Примечательно, что с одним из этих свойств связано происхождение слова «алгебра».

В IX в. выдающийся учёный Мухаммед ибн Муса аль-Хорезми (что означает Мухаммед, сын Мусы, из Хорезма) написал трактат о способах решения уравнений. В те времена отрицательные числа не признавали и называли невозможными, ложными, абсурдными. Поэтому если при решении уравнений появлялось «ложное число», его превращали в «настоящее», перенося в другую часть уравнения. Такое преобразование Мухаммед аль-Хорезми назвал *восстановлением* (по-арабски — «аль-джабр»). Уничтожение одинаковых членов в обеих частях уравнения он назвал *противопоставлением* (по-арабски — «аль-мукабала»).

Сам трактат носит название «Краткая книга об исчислении восстановления и противопоставления» (по-арабски — «Китаб аль-мухтасар фи хисаб аль-джабр ва-аль-мукабала»).

Мухаммед аль-Хорезми (IX в.)

Арабский математик, астроном и географ, в научных работах которого впервые алгебра рассматривалась как самостоятельный раздел математики.

Слово «аль-джабр» со временем превратилось в хорошо знакомое всем слово «алгебра».

В XII в. труды аль-Хорезми были переведены на латынь. В средневековой Европе имя аль-Хорезми записывали как *Algorizmi*, и многие правила из его трудов начинались словами *Dixit Algorizmi* («Алгоризми сказал»). Постепенно стали привыкать, что с этих слов начинаются многие правила, а слово *Algorizmi* перестали связывать с именем автора. Так возник термин «алгоритм», которым обозначают процесс, дающий за конечное количество шагов решение задачи.

С такими процессами вы подробно познакомитесь на уроках информатики.

глава

1 Линейное уравнение с одной переменной

- В этой главе вы повторите свойства уравнений, сможете усовершенствовать навыки решения уравнений и задач на составление уравнений.
- Вы узнаете, что некоторые известные вам уравнения можно объединить в один класс.

§ 2 Линейное уравнение с одной переменной

Рассмотрим уравнения: $2x = -3$, $0x = 0$, $0x = 2$.

Число $-1,5$ является единственным корнем первого уравнения.

Поскольку произведение любого числа на нуль равно нулю, то корнем второго уравнения является любое число.

Третье уравнение корней не имеет.

Несмотря на существенное различие полученных ответов, приведённые уравнения внешне похожи: все они имеют вид $ax = b$, где x — переменная, a и b — некоторые числа.

Уравнение вида $ax = b$, где x — переменная, a и b — некоторые числа, называют линейным уравнением с одной переменной.

Приведём примеры линейных уравнений: $\frac{1}{2}x = 7$; $-0,4x = 2,8$; $-x = 0$.

Заметим, что, например, уравнения $x^2 = 0$, $(x - 2)(x - 3) = 0$, $|x| = 5$ линейными не являются.

Текст, выделенный **жирным шрифтом**, разъясняет смысл термина «линейное уравнение с одной переменной». В математике предложение, раскрывающее суть термина (понятия, объекта), называют **определением**.

Итак, мы сформулировали (или говорят «дали») определение линейного уравнения с одной переменной.

- Если $a \neq 0$, то, разделив обе части уравнения $ax = b$ на a, получим $x = \frac{b}{a}$. Отсюда следует: *если $a \neq 0$, то уравнение $ax = b$ имеет единственный корень, равный $\frac{b}{a}$.*
- Если $a = 0$, то линейное уравнение принимает такой вид: $0x = b$. Тогда возможны два случая: $b = 0$ или $b \neq 0$.

В первом случае получаем уравнение $0x = 0$. Отсюда: *если $a = 0$ и $b = 0$, то уравнение $ax = b$ имеет бесконечно много корней: любое число является его корнем.*

Во втором случае, когда $b \neq 0$, при любом значении x получим неверное равенство $0x = b$. Отсюда: *если $a = 0$ и $b \neq 0$, то уравнение $ax = b$ не имеет корней.*

Подведём итог приведённых рассуждений в следующей таблице.

Значения a и b	$a \neq 0$	$a = 0,\ b = 0$	$a = 0,\ b \neq 0$
Корни уравнения $ax = b$	$x = \dfrac{b}{a}$	x — любое число	Корней нет

Пример 1. Решите уравнение:

1) $(3x + 2{,}1)(8 - 2x) = 0$; 2) $|5x - 6| = 4$; 3) $|4x + 2| = |3x - 1|$.

Решение. 1) Вы знаете, что произведение нескольких множителей равно нулю тогда, когда хотя бы один из множителей равен нулю, и наоборот, если хотя бы один из множителей равен нулю, то и произведение равно нулю. Поэтому для решения данного уравнения достаточно решить каждое из уравнений:

$$3x + 2{,}1 = 0,\ 8 - 2x = 0.$$

Отсюда $x = -0{,}7$ или $x = 4$.

2) Учитывая, что существуют только два числа, -4 и 4, модули которых равны 4, получаем:

$$5x - 6 = 4 \text{ или } 5x - 6 = -4.$$

Отсюда $x = 2$ или $x = 0{,}4$.

3) Модули двух чисел равны в одном из двух случаев: когда эти числа равны или когда эти числа являются противоположными. Получаем:

$$4x + 2 = 3x - 1 \text{ или } 4x + 2 = -(3x - 1).$$

Отсюда $x = -3$ или $x = -\dfrac{1}{7}$.

Ответ: 1) $-0{,}7$; 4; 2) 2; $0{,}4$; 3) -3; $-\dfrac{1}{7}$. ■

Обратите внимание на то, что рассмотренные уравнения не являются линейными, однако решение каждого из них сводится к решению линейного уравнения.

Пример 2. Решите уравнение:

1) $(a - 1)x = 2$;

2) $(a + 9)x = a + 9$.

Решение. 1) При $a = 1$ уравнение принимает вид $0x = 2$. В этом случае корней нет. При $a \neq 1$ получаем: $x = \dfrac{2}{a-1}$.

2) При $a = -9$ уравнение принимает вид $0x = 0$. В этом случае корнем уравнения является любое число. При $a \neq -9$ получаем: $x = 1$.

Ответ: 1) если $a = 1$, то уравнение не имеет корней; если $a \neq 1$, то $x = \dfrac{2}{a-1}$; 2) если $a = -9$, то x — любое число; если $a \neq -9$, то $x = 1$. ■

?

1. Какое уравнение называют линейным уравнением с одной переменной?

2. Сколько корней имеет линейное уравнение $ax = b$, если:
1) $a \neq 0$; 2) $a = 0$, $b \neq 0$; 3) $a = b = 0$?

Упражнения

2.1. Какие из данных уравнений являются линейными:
1) $3x = 6$; 3) $x^2 = 4$; 5) $\dfrac{4}{x} = 2$; 7) $x = 0$;
2) $x = 4$; 4) $|x| = 2$; 6) $\dfrac{1}{4}x = 2$; 8) $0x = 8$?

2.2. Решите уравнение:
1) $18 - 16x = -30x - 10$;
2) $-7x + 2 = 3x - 1$;
3) $10 - 2x = 12 + x$;
4) $6x - 19 = -2x - 15$;
5) $0{,}2x + 3{,}4 = 0{,}6x - 2{,}6$;
6) $\dfrac{5}{6}x + 12 = \dfrac{1}{4}x - 2$.

2.3. Найдите корень уравнения:
1) $10x + 7 = 8x - 9$;
2) $20 - 3x = 2x - 45$;
3) $2{,}7 + 1{,}9x = 2x + 1{,}5$;
4) $\dfrac{13}{18}x + 13 = \dfrac{7}{12}x + 8$.

2.4. Докажите, что:
1) корнем уравнения $4(x - 5) = 4x - 20$ является любое число;
2) уравнение $2y - 8 = 4 + 2y$ не имеет корней.

2.5. Решите уравнение:
1) $-3(x - 4) = 5x - 12$;
2) $(16x - 5) - (3 - 5x) = 6$;
3) $26 - 4x = 3x - 7(x - 3)$;
4) $-2(3 - 4x) + 5(2 - 1{,}6x) = 4$.

2.6. Решите уравнение:
1) $4(13 - 3x) - 17 = -5x$;
2) $(18 - 3x) - (4 + 2x) = 10$;
3) $14 - x = 0{,}5(4 - 2x) + 12$;
4) $4x - 3(20 - x) = 10x - 3(11 + x)$.

2.7. Решите уравнение:

1) $0{,}8 - (1{,}5x - 2) = -0{,}8 + 4{,}5x$;

2) $0{,}6x - 5(0{,}3x + 0{,}2) = 0{,}5(x - 1) - 0{,}8$;

3) $\frac{1}{7}\left(\frac{7}{8}y + 7\right) - \frac{3}{4}\left(\frac{2}{9}y + 1\frac{7}{9}\right) = \frac{1}{12}$;

4) $\frac{5}{27}(5{,}4 - 8{,}1y) = 0{,}03 + \frac{4}{17}(6{,}8 - 3{,}4y)$.

2.8. Найдите корень уравнения:

1) $0{,}9x - 0{,}6(x - 3) = 2(0{,}2x - 1{,}3)$;

2) $-0{,}4(3x - 1) + 8(0{,}8x - 0{,}3) = 5 - (3{,}8x + 4)$;

3) $\frac{4}{7}(0{,}56 - 4{,}2y) + 0{,}4 = \frac{5}{13}(0{,}52 - 6{,}5y)$.

2.9. Решите уравнение:

1) $8(7x - 3) = -48(3x + 2)$;

2) $4{,}5(8x + 20) = 6(6x + 15)$.

2.10. Чему равен корень уравнения:

1) $-36(6x + 1) = 9(4 - 2x)$;

2) $3{,}2(3x - 2) = -4{,}8(6 - 2x)$?

2.11. Решите уравнение:

1) $(4x - 1{,}6)(8 + x) = 0$;

2) $x(5 - 0{,}2x) = 0$;

3) $(3x - 2)\left(4 + \frac{1}{3}x\right) = 0$;

4) $(2x + 1{,}2)(x + 1)(0{,}7x - 0{,}21) = 0$.

2.12. Решите уравнение:

1) $(1{,}8 - 0{,}3y)(2y + 9) = 0$;

2) $(5y + 4)(1{,}1y - 3{,}3) = 0$.

2.13. Решите уравнение:

1) $\frac{5x - 4}{2} = \frac{16x + 1}{7}$;

2) $\frac{4y + 33}{3} = \frac{17 + y}{2}$.

2.14. Найдите корень уравнения:

1) $\frac{3m + 5}{4} = \frac{5m + 1}{3}$;

2) $\frac{5x + 3}{5} = \frac{x - 5}{8}$.

2.15. Чему равен корень уравнения:

1) $\frac{2x}{3} + \frac{5x}{4} = 23$;

2) $\frac{x}{6} - \frac{x}{8} = \frac{7}{36}$;

3) $\frac{3x}{10} - \frac{4}{15} = \frac{x}{6}$;

4) $\frac{x}{7} + \frac{3x - 1}{14} = \frac{x}{3}$?

2.16. Решите уравнение:

1) $\frac{7x}{6} - \frac{5x}{18} = \frac{4}{27}$;

2) $\frac{2x}{7} + \frac{x}{4} = \frac{15}{14}$;

3) $-\frac{x}{8} + 1 = \frac{x}{12}$;

4) $\frac{2x + 3}{5} + \frac{3x - 1}{2} = 2x$.

2.17. При каком значении переменной:

1) значение выражения $4x - 0{,}2(8x - 7)$ равно $-22{,}6$;

2) выражения $0{,}2(3 - 2y)$ и $0{,}3(7 - 6y) + 2{,}7$ принимают равные значения;

3) значение выражения $0{,}6y$ на 1,5 больше значения выражения $0{,}3(y - 4)$;

4) значение выражения $5x - 1$ в 5 раз меньше значения выражения $6{,}5 + 2x$?

2.18. При каком значении переменной:

1) выражения $6 - (2x - 9)$ и $(18 + 2x) - 3(x - 3)$ принимают равные значения;

2) значение выражения $-4(2y - 0{,}9)$ на 2,4 меньше значения выражения $5{,}6 - 10y$?

2.19. Решите уравнение:

1) $3x - \frac{2x+3}{2} = \frac{x+6}{3}$;

2) $\frac{6x-7}{5} - \frac{3x+1}{6} = \frac{11-x}{15}$;

3) $\frac{5x-3}{9} - \frac{4x+3}{6} = x - 1$;

4) $\frac{8x-5}{3} - \frac{4x+3}{4} + \frac{2-9x}{2} = -3$;

5) $\frac{8x^2-3x}{16} - \frac{6x^2+1}{12} = -1$.

2.20. Найдите корень уравнения:

1) $x - \frac{7x+1}{8} = \frac{4x+3}{4}$;

2) $\frac{2x+1}{6} - \frac{3x+1}{7} = 2$;

3) $\frac{2x+3}{3} - \frac{5x+13}{6} + \frac{5-2x}{2} = 6$;

4) $\frac{4x^2+5x}{14} + \frac{10-2x^2}{7} = 5$.

2.21. Решите уравнение:

1) $|x| + 6 = 13$;

2) $|x| - 7 = -12$;

3) $7|x| - 3 = 0$;

4) $|x - 5| = 4$;

5) $|9 + x| = 0$;

6) $|x - 4| = -2$;

7) $|3x + 4| = 2$;

8) $|2x + 1| + 13 = 14$;

9) $|3x - 2| = |x + 1|$;

10) $|x + 4| = |x - 6|$;

11) $||x| - 3| = 5$.

2.22. Решите уравнение:

1) $|x| - 8 = -5$;

2) $|x| + 5 = 2$;

3) $|x + 12| = 3$;

4) $|8 - 0{,}2x| = 12$;

5) $|2x - 1| = 0$;

6) $|10x - 7| - 32 = -16$;

7) $||x| - 2| = 2$;

8) $|3x + 2| = |x - 1|$;

9) $|x - 5| = |x + 1|$.

2.23. При каком значении a уравнение:

1) $5ax = -45$ имеет корень, равный числу 3;

2) $(a - 4)x = -5a + 4x - 7$ имеет корень, равный числу -6?

2.24. При каком значении a уравнение:

1) $3ax = 12 - x$ имеет корень, равный числу -9;

2) $(5a + 2)x = 8 - 2a$ имеет корень, равный числу 2?

2.25. Укажите какое-либо значение b, при котором будет целым числом корень уравнения:

1) $0{,}1x = b$; 2) $bx = 21$; 3) $\frac{1}{6}x = b$; 4) $bx = \frac{1}{6}$.

2.26. Составьте уравнение, которое:

1) имеет единственный корень, равный числу -4;

2) имеет бесконечно много корней;

3) не имеет корней.

2.27. При каких значениях b число 3 является корнем уравнения $(b + 2)(x - 1) = 2(x + b - 1)$?

◆◆◆

2.28. Найдите все целые значения m, при которых корень уравнения является целым числом:

1) $mx = 3$; 2) $(m + 4)x = 49$.

2.29. Найдите все целые значения n, при которых корень уравнения является натуральным числом:

1) $nx = -5$; 2) $(n - 6)x = 25$.

2.30. При каком значении b уравнения имеют один и тот же корень:

1) $7 - 3x = 6x - 56$ и $x - 3b = -35$;

2) $2y - 9b = 7$ и $3{,}6 + 5y = 7(1{,}2 - y)$?

2.31. При каком значении c уравнения имеют один и тот же корень:

1) $(4x + 1) - (7x + 2) = x$ и $12x - 9 = c + 5$;

2) $\frac{1}{7}cx = x + c$ и $6 - 3(2x - 4) = -8x + 4$?

2.32. При каком значении a уравнение не имеет корней:

1) $ax = 6$; 2) $(3 - a)x = 4$; 3) $(a - 2)x = a + 2$?

2.33. При каком значении a любое число является корнем уравнения:

1) $ax = a$; 2) $(a - 2)x = 2 - a$; 3) $a(a + 5)x = a + 5$?

2.34. При каких значениях a уравнение имеет единственный корень:

1) $(a - 5)x = 6$; 2) $(a + 7)x = a + 7$?

2.35. Решите уравнение:

1) $(b + 1)x = 9$; 2) $(b^2 + 1)x = -4$.

2.36. Решите уравнение $(m + 8)x = m + 8$.

2.37. Каким выражением можно заменить звёздочку в равенстве $6x + 8 = 4x + *$, чтобы получилось уравнение:

1) не имеющее корней;

2) имеющее бесконечно много корней;

3) имеющее один корень?

2.38. В равенстве $2(1{,}5x - 0{,}5) = 7x + *$ замените звёздочку таким выражением, чтобы получившееся уравнение:

1) не имело корней;

2) имело бесконечно много корней;

3) имело один корень.

2.39. Решите уравнение:

1) $|x| + 3x = 12$; 3) $2(x - 5) - 6|x| = -18$;

2) $|x| - 4x = 9$; 4) $||x| - 1| = |x - 1|$.

2.40. Решите уравнение:

1) $2x - |x| = -1$; 2) $7|x| - 3(x + 2) = -10$; 3) $||x| - 2| = |x + 2|$.

2.41. При каких целых значениях a корень уравнения:

1) $x - 2 = a$; 3) $2x - a = 4$;

2) $x + 7a = 9$; 4) $x + 2a = 3$

является целым числом, которое делится нацело на 2?

2.42. При каких целых значениях b корень уравнения:

1) $x + 3 = b$; 2) $x - 2 = b$; 3) $x - 3b = 8$

является целым числом, которое делится нацело на 3?

2.43. При каких значениях b корень уравнения меньше, чем b:

1) $3x = b$; 2) $x = 2b$?

2.44. При каких значениях d корень уравнения больше, чем d:

1) $4x = d$; 2) $\frac{1}{5}x = d$?

Упражнения для повторения

2.45. Один работник может выполнить задание за 45 ч, а другому для этого надо в $1\frac{1}{2}$ раза меньше времени, чем первому. За сколько часов они выполнят это задание, работая вместе? Какую часть задания при этом выполнит каждый из них?

2.46. За первый день Вася прочитал $\frac{8}{15}$ страниц книги, за второй — $\frac{5}{12}$ страниц книги и за третий день — оставшиеся 12 страниц. Сколько страниц в этой книге?

2.47. Известно, что n — натуральное число. Каким числом, чётным или нечётным, является значение выражения:

1) $4n$; 2) $2n - 1$; 3) $n(n + 1)$?

2.48. Верно ли, что при любом значении a:

1) $2a > a$; 2) $2|a| > |a|$?

§ 3 Решение задач с помощью уравнений

Вам неоднократно приходилось решать задачи с помощью составления уравнений. Разнообразие решённых задач является лучшим подтверждением эффективности и универсальности этого метода. В чём же заключается секрет его силы?

Дело в том, что условия непохожих друг на друга задач удаётся записать математическим языком. Полученное уравнение — это результат перевода условия задачи с русского языка на математический.

Часто условие задачи представляет собой описание какой-то реальной ситуации. Составленное по условию уравнение называют **математической моделью** ситуации.

Конечно, чтобы получить ответ, уравнение надо решить. Для этого в алгебре разработаны различные методы и приёмы. С некоторыми из них вы уже знакомы, многие другие вам ещё предстоит изучить.

Найденный корень уравнения — это ещё не ответ задачи. Следует выяснить, не противоречит ли полученный результат реальной ситуации, описанной в условии задачи.

Рассмотрим, например, такие задачи.

1) За 4 ч собрали 6 кг ягод, причём каждый час собирали одинаковое по массе количество ягод. Сколько ягод собирали за один час?

2) Несколько мальчиков собрали 6 кг ягод. Каждый из них собрал по 4 кг. Сколько мальчиков собирали ягоды?

По условию этих задач можно составить одно и то же уравнение $4x = 6$, корнем которого является число 1,5. Но в первой задаче ответ «полтора килограмма ягод за час» является приемлемым, а во второй ответ «ягоды собирали полтора мальчика» — нет. Поэтому вторая задача не имеет решений.

При решении задач на составление уравнений удобно придерживаться такой последовательности действий.

1. По условию задачи составить уравнение (сконструировать математическую модель задачи).

2. Решить полученное уравнение.

3. Выяснить, соответствует ли найденный корень смыслу задачи, и записать ответ.

Эту последовательность действий, состоящую из трёх шагов, можно назвать **алгоритмом решения текстовых задач**.

Пример 1. Рабочий должен был выполнить заказ за 8 дней. Однако, изготавливая ежедневно 12 деталей сверх нормы, он уже за 6 дней работы не только выполнил заказ, но и изготовил дополнительно 22 детали. Сколько деталей ежедневно изготавливал рабочий?

Решение. Пусть рабочий изготавливал ежедневно x деталей. Тогда по плану он должен был изготавливать ежедневно $(x - 12)$ деталей, а всего их должно было быть изготовлено $8(x - 12)$. На самом деле он изготовил $6x$ деталей.

Так как по условию значение выражения $6x$ на 22 больше значения выражения $8(x - 12)$, то получаем уравнение:

$$6x - 22 = 8(x - 12).$$

Тогда

$$6x - 22 = 8x - 96;$$
$$6x - 8x = -96 + 22;$$
$$-2x = -74;$$
$$x = 37.$$

Ответ: 37 деталей. ■

Пример 2. Велосипедист проехал 65 км за 5 ч. Часть пути он ехал со скоростью 10 км/ч, а оставшийся путь — со скоростью 15 км/ч. Сколько времени он ехал со скоростью 10 км/ч и сколько — со скоростью 15 км/ч?

Решение. Пусть велосипедист ехал x ч со скоростью 10 км/ч. Тогда со скоростью 15 км/ч он ехал $(5 - x)$ ч. Первая часть пути составляет $10x$ км, а вторая — $15(5 - x)$ км. Всего велосипедист проехал $10x + 15(5 - x)$ км. Поскольку весь путь составил 65 км, то получаем уравнение:

$$10x + 15(5 - x) = 65.$$

Отсюда $10x + 75 - 15x = 65$;

$$-5x = -10;$$
$$x = 2.$$

Следовательно, со скоростью 10 км/ч он ехал 2 ч, а со скоростью 15 км/ч — 3 ч.

Ответ: 2 ч, 3 ч. ■

Упражнения

3.1. Наташа купила 24 тетради, причём тетрадей в линейку она купила на 6 больше, чем тетрадей в клетку. Сколько тетрадей каждого вида купила Наташа?

3.2. С двух деревьев собрали 65,4 кг вишен, причём с одного дерева собрали на 12,6 кг меньше, чем со второго. Сколько килограммов вишен собрали с каждого дерева?

3.3. Периметр прямоугольника равен 7,8 см, а одна из его сторон на 1,3 см больше другой. Найдите стороны прямоугольника.

3.4. Одна из сторон прямоугольника в 11 раз меньше другой. Найдите стороны прямоугольника, если его периметр равен 144 см.

3.5. Канат длиной 30 м разрезали на три части. Первая часть на 2 м длиннее второй и на 4 м длиннее третьей. Найдите длину каждой части каната.

3.6. Тремя крупнейшими озёрами России являются озеро Байкал, Ладожское озеро и Онежское озеро. Общий объём воды, содержащейся в этих озёрах, составляет 24 808 км^3, причём объём воды, содержащейся в Ладожском озере, на 22 707 км^3 меньше, чем объём воды озера Байкал, и на 623 км^3 больше, чем объём воды Онежского озера. Сколько кубических километров воды содержится в каждом из этих озёр?

3.7. В доме 160 квартир трёх видов: однокомнатные, двухкомнатные и трёхкомнатные. Однокомнатных квартир в 2 раза меньше, чем двухкомнатных, и на 24 меньше, чем трёхкомнатных. Сколько в доме квартир каждого вида?

3.8. Трое рабочих изготовили 96 деталей. Первый из них изготовил в 3 раза больше деталей, чем второй, а третий — на 16 деталей больше, чем второй. Сколько деталей изготовил каждый рабочий?

3.9. В трёх цехах завода работает 101 человек. Количество рабочих первого цеха составляет $\frac{4}{9}$ количества рабочих третьего цеха, а количество рабочих второго цеха — 80 % количества рабочих третьего. Сколько человек работает в первом цехе?

3.10. Велосипедисты участвовали в трёхдневном велопробеге. Во второй и третий дни они проехали соответственно 120 % и $\frac{4}{5}$ расстояния, которое они преодолели за первый день. Какой путь они проехали в первый день, если длина всего маршрута составляет 270 км?

3.11. В 6 больших и 8 маленьких ящиков разложили 232 кг яблок. Сколько килограммов яблок оказалось в каждом ящике, если в каждом маленьком ящике было на 6 кг яблок меньше, чем в каждом большом?

3.12. В двух залах кинотеатра 534 места. В одном зале 12 одинаковых рядов, а в другом — 15 одинаковых рядов. В каждом ряду первого зала на 4 места больше, чем в каждом ряду второго. Сколько мест в каждом зале кинотеатра?

3.13. Расстояние между двумя городами мотоциклист проехал за 0,8 ч, а велосипедист — за 4 ч. Скорость велосипедиста на 48 км/ч меньше скорости мотоциклиста. Найдите скорость каждого из них.

3.14. За 2 кг конфет одного вида заплатили столько же, сколько за 3,5 кг конфет другого вида. Какова цена каждого вида конфет, если 1 кг конфет первого вида на 48 р. дороже 1 кг конфет второго вида?

3.15. Килограмм огурцов на 4 р. дешевле килограмма помидоров. Сколько стоит 1 кг помидоров, если за 3,2 кг помидоров заплатили столько же, сколько за 3,6 кг огурцов?

3.16. В одном баке было в 3 раза больше воды, чем в другом. Когда в первый бак долили 16 л воды, а во второй — 80 л, то в обоих баках воды стало поровну. Сколько литров воды было сначала в каждом баке?

3.17. На одной полке было в 4 раза больше книг, чем на другой. Когда с первой полки взяли 5 книг, а на вторую поставили 16 книг, то на обеих полках книг стало поровну. Сколько книг было сначала на каждой полке?

3.18. Сейчас отцу 26 лет, а его сыну — 2 года. Через сколько лет отец будет в 5 раз старше сына?

3.19. Сейчас матери 40 лет, а её дочери — 18 лет. Сколько лет тому назад дочь была в 3 раза моложе матери?

◆ ◆

3.20. Для школьной библиотеки приобрели 50 орфографических и толковых словарей русского языка на общую сумму 11 000 р. Сколько было куплено словарей каждого вида, если орфографический словарь стоит 200 р., а толковый — 250 р.?

3.21. Предприниматель положил в банк 300 000 р. на два различных вклада, причём по одному вкладу ему насчитывали 7 % годовых, а по другому — 8 % годовых. Через год он получил 22 200 р. прибыли. Какая сумма была внесена на каждый из вкладов?

3.22. В кассе было 19 монет по 2 р. и по 5 р. на общую сумму 62 р. Сколько монет каждого вида было в кассе?

3.23. В двух хранилищах было одинаковое количество угля. Когда из первого хранилища вывезли 680 т угля, а из второго — 200 т, то в первом осталось в 5 раз меньше угля, чем во втором. Сколько тонн угля было в каждом хранилище сначала?

3.24. У Пети и Васи было поровну денег. Когда на покупку книг Петя потратил 120 р., а Вася — 180 р., то у Пети осталось в 2 раза больше денег, чем у Васи. Сколько денег было у каждого мальчика сначала?

3.25. В одном мешке было в 5 раз больше муки, чем в другом. Когда из первого мешка пересыпали 12 кг муки во второй мешок, масса муки во втором мешке составила $\frac{5}{7}$ массы муки в первом. Сколько килограммов муки было в каждом мешке сначала?

3.26. В одном контейнере было в 3 раза больше угля, чем в другом. Когда из первого контейнера пересыпали 300 кг угля во второй контейнер, то масса угля в первом контейнере составила 60 % массы угля во втором. Сколько килограммов угля было в каждом контейнере сначала?

3.27. Одному рабочему надо было изготовить 90 деталей, а другому — 60. Первый рабочий ежедневно изготавливал 4 детали, а второй — 5 деталей. Через сколько дней первому рабочему останется изготовить в 2 раза больше деталей, чем второму, если они начали работать в один день?

3.28. В одной цистерне было 200 л воды, а в другой — 640 л. Когда из второй цистерны использовали в 2 раза больше воды, чем из первой, то во второй осталось в 3,5 раза больше воды, чем в первой. Сколько литров воды использовали из каждой цистерны?

3.29. Из двух городов, расстояние между которыми равно 385 км, выехали навстречу друг другу легковой и грузовой автомобили. Легковой автомобиль ехал со скоростью 80 км/ч, а грузовой — 50 км/ч. Сколько времени ехал до встречи каждый из них, если грузовой автомобиль выехал на 4 ч позже легкового?

3.30. Из первого села во второе вышел пешеход со скоростью 4 км/ч, а через 1,5 ч после этого из второго села навстречу ему выехал велосипедист со скоростью 16 км/ч. Через сколько минут после выезда велосипедист встретился с пешеходом, если расстояние между сёлами равно 14 км?

3.31. Расстояние между двумя городами по реке на 55 км меньше, чем по шоссе. Расстояние между городами теплоход проходит по реке за 6 ч, а автобус по шоссе — за 3 ч 30 мин. Найдите скорости автобуса и теплохода, если скорость теплохода на 30 км/ч меньше скорости автобуса.

3.32. Теплоход прошёл 4 ч по течению реки и 3 ч против течения. Путь, пройденный теплоходом по течению, на 48 км больше пути, пройденного против течения. Найдите скорость теплохода в стоячей воде, если скорость течения равна 2,5 км/ч.

3.33. Турист плыл 5 ч на плоту по течению реки и 1,5 ч на моторной лодке против течения. Скорость лодки в стоячей воде равна 24 км/ч. Найдите скорость течения, если против течения турист проплыл на 23 км больше, чем по течению.

3.34. В двух ящиках было 55 кг печенья. Когда из первого ящика переложили во второй $\frac{1}{3}$ массы содержащегося в нём печенья, то в первом ящике осталось на 5 кг больше печенья, чем стало во втором. Сколько килограммов печенья было в каждом ящике сначала?

3.35. В двух корзинах было 24 кг груш. Когда из первой корзины переложили во вторую $\frac{3}{7}$ массы содержащихся в ней груш, то масса груш во второй корзине стала в 2 раза больше массы груш, оставшихся в первой корзине. Сколько килограммов груш было в каждой корзине сначала?

3.36. На трёх полках стоят книги. На первой полке стоит $\frac{4}{15}$ всех книг, на второй — 60 % всех книг, а на третьей — на 8 книг меньше, чем на первой. Сколько всего книг стоит на трёх полках?

3.37. В четыре бидона разлили молоко. В первый бидон налили 30 % всего молока, во второй — $\frac{5}{6}$ того, что в первый, в третий — на 26 л меньше, чем в первый, а в четвёртый — на 10 л больше, чем во второй. Сколько литров молока разлили в четыре бидона?

3.38. На базу приехали туристы. При расселении туристов в палатки оказалось, что если в каждую палатку поселить 6 туристов, то 5 туристам места не хватит, а если расселять по 7 туристов, то 6 мест останутся свободными. Сколько туристов приехало на базу?

3.39. При подготовке новогодних подарков для учащихся 7 класса оказалось, что если в каждый подарок положить по 4 апельсина, то не хватит 3 апельсинов, а если положить по 3 апельсина, то останутся лишними 25 апельсинов. Сколько имелось апельсинов для подготовки подарков?

3.40. Рабочий планировал ежедневно изготавливать по 20 деталей, чтобы вовремя выполнить производственное задание. Но он изготавливал каждый день на 8 деталей больше, чем планировал, и уже за 2 дня до окончания срока работы он изготовил 8 деталей сверх плана. Сколько дней планировал рабочий выполнять задание?

3.41. Готовясь к экзамену, ученик планировал ежедневно решать 10 задач. Но он каждый день решал на 4 задачи больше, поэтому уже за 3 дня до экзамена ему осталось решить 2 задачи. Сколько всего задач планировал решить ученик?

3.42. В двузначном числе количество десятков в 3 раза больше количества единиц. Если цифры числа переставить, то полученное число будет на 54 меньше данного. Найдите данное двузначное число.

3.43. В двузначном числе количество десятков на 2 меньше количества единиц. Если цифры числа переставить, то полученное число будет в $1\frac{3}{4}$ раза больше данного. Найдите данное двузначное число.

3.44. Из двух городов, расстояние между которыми равно 270 км, выехали одновременно навстречу друг другу два автомобиля. Через 2 ч после начала движения расстояние между ними составляло 30 км. Найдите скорость каждого автомобиля, если скорость одного из них на 10 км/ч больше скорости другого.

3.45. Есть два сплава меди и цинка. Первый сплав содержит 9 %, а второй — 30 % цинка. Сколько килограммов каждого сплава надо взять, чтобы получить сплав массой 300 кг, содержащий 23 % цинка?

3.46. Есть два водно-солевых раствора. Первый раствор содержит 25 %, а второй — 40 % соли. Сколько килограммов каждого раствора надо взять, чтобы получить раствор массой 50 кг, содержащий 34 % соли?

3.47. Из двух сёл, расстояние между которыми равно 7 км, одновременно начали движение пешеход и велосипедист. Скорость пешехода равна 3,6 км/ч, а велосипедиста — 12 км/ч. Через какое время после начала движения расстояние между ними будет 1,4 км?

Упражнения для повторения

3.48. Вычислите значение выражения:

1) $-9{,}6 : 12 - 29 : (-5{,}8) + 4 : (-25)$;

2) $-3{,}4 \cdot (4 - 4{,}6) + 12{,}4 \cdot (-0{,}8 - 2{,}2)$;

3) $\left(0{,}4 - \frac{3}{20}\right) \cdot 6\frac{2}{3} - 1{,}75 : \left(-7\frac{7}{8}\right)$;

4) $\left(6{,}3 : \left(-\frac{9}{20}\right) - 2{,}6 : \left(-\frac{1}{20}\right)\right) \cdot \left(-\frac{4}{19}\right) - 0{,}6 : (-0{,}36)$.

3.49. Найдите значение выражения:

1) $14 - 6x$, если $x = 4;\ -2;\ 0;\ -0{,}3;\ \frac{3}{8}$;

2) $a^2 + 3$, если $a = 7;\ -2;\ 0;\ 0{,}4;\ -1\frac{1}{3}$;

3) $(2m - 1)n$, если $m = 0{,}2$, $n = -0{,}6$.

3.50. Заполните таблицу, вычислив значение выражения $-3x + 2$ для данных значений x.

x	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4
$-3x + 2$									

3.51. Какую цифру надо приписать слева и справа к числу 37, чтобы полученное число делилось нацело на 6?

3.52. Имеет ли уравнение корни:

1) $x^2 = 0$; 3) $|x| = x$;

2) $x^2 = -1$; 4) $|x| = -x$?

В случае утвердительного ответа укажите их.

3.53. Может ли быть целым числом значение выражения:

1) $\frac{1}{x}$; 2) $\frac{x}{x+1}$?

Итоги главы 1

Линейное уравнение с одной переменной

Уравнение вида $ax = b$, где x — переменная, a и b — некоторые числа, называют линейным уравнением с одной переменной.

Решение линейного уравнения с одной переменной

Значения a и b	$a \neq 0$	$a = 0,\ b = 0$	$a = 0,\ b \neq 0$
Корни уравнения $ax = b$	$x = \frac{b}{a}$	x — любое число	Корней нет

Схема решения задач на составление уравнений

1. По условию задачи составить уравнение (сконструировать математическую модель задачи).
2. Решить полученное уравнение.
3. Выяснить, соответствует ли найденный корень смыслу задачи, и записать ответ.

глава

2 Целые выражения

- В этой главе вы научитесь упрощать выражения, познакомитесь с формулами и приёмами, помогающими облегчить работу по преобразованию выражений.
- Вы узнаете, что возведение числа в квадрат и куб — частные случаи нового арифметического действия.
- Вы научитесь классифицировать алгебраические выражения.

§ 4 Тождественно равные выражения. Тождества

Рассмотрим две пары выражений:

1) $x^5 - x$ и $5x^3 - 5x$;

2) $2(x - 1) - 1$ и $2x - 3$.

В следующих таблицах приведены значения этих выражений при *некоторых* значениях переменной x.

x	-2	-1	0	1	2
$x^5 - x$	-30	0	0	0	30
$5x^3 - 5x$	-30	0	0	0	30

x	-2	-1	0	1	2
$2(x - 1) - 1$	-7	-5	-3	-1	1
$2x - 3$	-7	-5	-3	-1	1

Мы видим, что эти значения совпадают для каждой отдельно взятой пары выражений.

Сохранится ли эта закономерность при *любых других* значениях x?

Для выражений, записанных в первой таблице, ответ на этот вопрос отрицательный: если, например, $x = 3$, то $x^5 - x = 3^5 - 3 = 240$, а $5x^3 - 5x = 5 \cdot 3^3 - 5 \cdot 3 = 120$.

А значения выражений, записанных во второй таблице, совпадают при *любых* значениях x. Докажем это.

$2(x - 1) - 1 = 2x - 2 - 1 = 2x - 3$, т. е. после упрощения выражение $2(x - 1) - 1$ «превратилось» в выражение $2x - 3$.

Определение

Выражения, соответственные значения которых равны при любых значениях входящих в них переменных, называют тождественно равными.

Например, выражения $2(x-1)-1$ и $2x-3$ — тождественно равные, а выражения x^5-x и $5x^3-5x$ тождественно равными не являются.

Примеры пар тождественно равных выражений:

$$7(a+b) \text{ и } 7a+7b;$$
$$3x+y \text{ и } y+3x;$$
$$m^2np \text{ и } nm^2p;$$
$$a-(b+c) \text{ и } a-b-c.$$

Рассмотрим равенство $7(a+b)=7a+7b$. В силу распределительного свойства умножения относительно сложения оно верно при любых значениях переменных a и b.

Определение

Равенство, верное при любых значениях входящих в него переменных, называют тождеством.

Из пары тождественно равных выражений легко получить тождество.

Например, равенства

$$3x+y=y+3x;$$
$$m^2np=nm^2p;$$
$$a-(b+c)=a-b-c$$

являются тождествами.

Заметим, что с тождествами вы встречались и раньше. Так, равенства, выражающие свойства сложения и умножения чисел, являются примерами тождеств:

$$a+b=b+a;$$
$$(a+b)+c=a+(b+c);$$
$$ab=ba;$$
$$(ab)c=a(bc);$$
$$a(b+c)=ab+ac.$$

Найдём значение выражения $11a-3a+2$ при $a=\frac{1}{8}$. Конечно, можно сразу в это выражение подставить вместо a число $\frac{1}{8}$ и найти значение числового выражения $11\cdot\frac{1}{8}-3\cdot\frac{1}{8}+2$. Однако гораздо удобнее сначала привести подобные слагаемые, заменив данное выражение $11a - 3a + 2$ на тождественно равное: $8a + 2$. При $a = \frac{1}{8}$ имеем: $8 \cdot \frac{1}{8} + 2 = 3$.

Замену одного выражения другим, тождественно равным ему, называют **тождественным преобразованием** выражения.

Приведение подобных слагаемых и раскрытие скобок — примеры тождественных преобразований выражений. Упрощая выражение, мы фактически заменяем его на более простое, тождественно равное ему.

Для того чтобы доказать, что данное равенство является тождеством (или доказать тождество), используют такие приёмы (методы).

- **Тождественно преобразуют одну из частей данного равенства, получая другую часть.**
- **Тождественно преобразуют каждую из частей данного равенства, получая одно и то же выражение.**
- **Доказывают, что разность левой и правой частей данного равенства тождественно равна нулю.**

Пример 1. Докажите тождество:

1) $2(3a + 4b) + 3(a - 7b) - 7(2a - 7b) = -5a + 36b$;

2) $0{,}6(x - 5) + 0{,}4(x + 1) = 0{,}8(x + 2) + 0{,}2(x - 21)$;

3) $a(b - c) + b(c - a) = c(b - a)$.

Решение. 1) Упростим левую часть равенства:

$2(3a + 4b) + 3(a - 7b) - 7(2a - 7b) = 6a + 8b + 3a - 21b - 14a + 49b = -5a + 36b$.

Тождество доказано.

2) Упростим левую и правую части равенства:

$0{,}6(x - 5) + 0{,}4(x + 1) = 0{,}6x - 3 + 0{,}4x + 0{,}4 = x - 2{,}6$;

$0{,}8(x + 2) + 0{,}2(x - 21) = 0{,}8x + 1{,}6 + 0{,}2x - 4{,}2 = x - 2{,}6$.

Получили одно и то же выражение. Следовательно, тождество доказано.

3) Рассмотрим разность левой и правой частей:

$a(b - c) + b(c - a) - c(b - a) = ab - ac + bc - ab - bc + ac = 0$.

Тождество доказано. ■

Пример 2. Докажите, что равенство $(a + 2)(a - 3) = a^2 - 6$ не является тождеством.

Решение. Чтобы доказать, что равенство не является тождеством, достаточно привести *контрпример*: указать такое значение переменной (переменных, если их несколько), при котором данное равенство не выполняется.

Например, при $a = 1$ имеем:

$$(a + 2)(a - 3) = (1 + 2)(1 - 3) = -6;\ a^2 - 6 = 1 - 6 = -5.$$

Следовательно, данное равенство не является тождеством. ■

1. Какие выражения называют тождественно равными?
2. Что называют тождеством?
3. Что называют тождественным преобразованием выражения?
4. Какие тождественные преобразования выражений вы знаете?
5. Какие приёмы используют для доказательства тождеств?

Упражнения

4.1. Какие свойства арифметических действий дают возможность утверждать, что данные выражения являются тождественно равными:
1) $ab + cd$ и $cd + ab$;
2) $(a + 1) + b$ и $a + (1 + b)$;
3) $a \cdot 4b$ и $4ab$;
4) $(x + 2)(x + 3)$ и $(3 + x)(2 + x)$;
5) $7(a - 4)$ и $7a - 28$?

4.2. Является ли тождеством равенство:
1) $2x - 12 = 2(x - 6)$;
2) $a - b = -(b - a)$;
3) $3m + 9 = 3(m + 9)$;
4) $(a + b) \cdot 1 = a + b$;
5) $(a + b) \cdot 0 = a + b$;
6) $(a - a)(b + b) = 0$;
7) $3a - a = 3$;
8) $4x + 3x = 7x$;
9) $a - (b + c) = a - b + c$;
10) $m + (n - k) = m + n - k$;
11) $4a - (3a - 5) = a + 5$;
12) $(a - 5)(a + 3) = (5 - a)(3 + a)$?

4.3. Являются ли тождественно равными выражения:
1) $8(a - b + c)$ и $8a - 8b + 8c$;
2) $-2(x - 4)$ и $-2x - 8$;
3) $(5a - 4) - (2a - 7)$ и $3a - 11$?

4.4. Сравните значения выражений a^2 и $|a|$ при $a = -1$; 0; 1. Можно ли утверждать, что равенство $a^2 = |a|$ является тождеством?

4.5. Какому из данных выражений тождественно равно выражение $-3a + 8b - a - 11b$:
1) $-4a + 3b$;
2) $-3a + 3b$;
3) $-4a - 3b$;
4) $-3a - 3b$?

4.6. Среди выражений $-10a + 7$; $-10a - 7$; $-14a + 7$; $-14a - 7$ найдите выражение, тождественно равное выражению $-12a + (7 - 2a)$.

4.7. Докажите тождество:
1) $-5x - 6(9 - 2x) = 7x - 54$;
2) $\frac{1}{3}(12 - 0{,}6y) + 0{,}3y = 0{,}1y + 4$;
3) $3(7 - a) - 7(1 - 3a) = 14 + 18a$;
4) $(6x - 8) - 5x - (4 - 9x) = 10x - 12$;

5) $3(2{,}1m - n) - 0{,}9(7m + 2n) = -4{,}8n$;

6) $\frac{2}{3}\left(-\frac{3}{8}x + 6\right) - \frac{1}{6}\left(24 - 1\frac{1}{2}x\right) = 0$.

4.8. Докажите тождество:

1) $-0{,}2(4b - 9) + 1{,}4b = 0{,}6b + 1{,}8$;

2) $(5a - 3b) - (4 + 5a - 3b) = -4$;

3) $5(0{,}4x - 0{,}3) + (0{,}8 - 0{,}6x) = 1{,}4x - 0{,}7$;

4) $\frac{1}{9}(3y - 27) - 2\left(\frac{1}{12}y - 1{,}5\right) = \frac{1}{6}y$.

4.9. Какие из данных равенств являются тождествами:

1) $(2a - 3b)^2 = (3b - 2a)^2$;

2) $(a - b)^3 = (b - a)^3$;

3) $|a + 5| = a + 5$;

4) $|a - b| = |b - a|$;

5) $|a^2 + 4| = a^2 + 4$;

6) $|a + b| = |a| + |b|$;

7) $|a - 1| = |a| - 1$;

8) $a^2 - b^2 = (a - b)^2$?

4.10. Запишите в виде равенства утверждение:

1) сумма противоположных чисел равна нулю;

2) произведение данного числа и числа 1 равно 1;

3) произведением данного числа и числа –1 является число, противоположное данному;

4) модули противоположных чисел равны;

5) разность противоположных чисел равна нулю.

Какие из этих равенств являются тождествами?

4.11. Докажите тождество:

1) $4(2 - 3m) - (6 - m) - 2(3m + 4) = -17m - 6$;

2) $a + b - 10ab = 2a(3 - b) - 3b(a - 2) - 5(ab + a + b)$;

3) $6(5a - 3) + (10 - 20a) - (6a - 4) = 5a - (3a - (2a - 4))$.

4.12. Докажите тождество:

1) $(3m - 7) \cdot 0{,}6 - 0{,}8(4m - 5) - (-1{,}7 - 1{,}4m) = 1{,}5$;

2) $7a(3b + 4c) - 3a\left(b + \frac{1}{3}c\right) = 9a(2b + 3c)$.

4.13. Докажите, что не является тождеством равенство:

1) $(a + 3)^2 = a^2 + 9$;

2) $(b - 1)(b + 1) = (b - 1)b + 1$;

3) $(c + 1)^3 = c^3 + 1$;

4) $|m| - |n| = |n| - |m|$.

4.14. Докажите, что не являются тождественно равными выражения:

1) $4 - m^2$ и $(2 - m)^2$; 2) $|-m|$ и m; 3) $m^3 + 8$ и $(m + 2)(m^2 + 4)$.

Упражнения для повторения

4.15. Пассажирский поезд проходит расстояние между двумя станциями за 12 ч. Если одновременно с этих станций выйдут навстречу друг другу пассажирский и товарный поезда, то они встретятся через 8 ч после начала движения. За какое время товарный поезд может преодолеть расстояние между станциями?

4.16. Фермер выращивал гречиху на двух участках общей площадью 24 га. На одном участке он собрал по 8 ц гречихи с гектара, а на втором — по 9 ц с гектара. Сколько всего центнеров гречихи собрал фермер, если со второго участка он собрал на 46 ц гречихи больше, чем с первого?

4.17. Известно, что $a > 0$, $a + b < 0$. Сравните:
1) b и 0; 2) $|a|$ и $|b|$.

4.18. Цену товара сначала увеличили на 50 %, а потом уменьшили на 50 %. Увеличилась или уменьшилась и на сколько процентов начальная цена товара?

4.19. На сколько процентов увеличилось в России количество детских театров и театров юного зрителя с 1995 года по 2008 год, если в 1995 году таких театров было 138, а в 2008 году — 161? Ответ округлите до десятых процента.

§ 5 Степень с натуральным показателем

Как вы знаете, в математике придумали способ коротко записывать произведение, все множители которого равны.

Например, $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \left(\frac{1}{2}\right)^3$.

Выражение $\left(\frac{1}{2}\right)^3$ называют **степенью**, число $\frac{1}{2}$ — **основанием степени**, а число 3 — **показателем степени**.

Определение

Степенью числа a с натуральным показателем n, бóльшим 1, называют произведение n множителей, каждый из которых равен a.

Степень с основанием a и показателем n обозначают a^n и читают: «a в n-й степени». Степени с показателями 2 и 3 можно прочитать иначе: запись a^2 читают: «a в квадрате», запись a^3 — «a в кубе».

Обратите внимание, что в определении степени на показатель n наложено ограничение $n > 1$. И это понятно: ведь не принято рассматривать произведение, состоящее из одного множителя.

А может ли показатель степени быть равным 1? Ответ на этот вопрос даёт следующее определение.

Определение

Степенью числа a с показателем 1 называют само это число.

Замечание. Это определение позволяет любое число считать степенью с показателем 1.

Итак, из приведённых определений следует, что

$$a^n = \underbrace{aa \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ множителей}}, \text{ где } n > 1,$$

$$a^1 = a.$$

Легко вычислить, что, например, $2^5 = 32$. В таком случае говорят, что число 2 **возвели в пятую степень** и получили 32. Также можно сказать, что выполнили **действие возведения в пятую степень** числа 2.

Равенство $(-3)^2 = 9$ означает, что число -3 **возвели в квадрат** и получили 9, а равенство $(-3)^3 = -27$ означает, что число -3 **возвели в куб** и получили -27.

Заметим, что алгебраическое выражение может быть получено с помощью не только сложения, вычитания, умножения и деления, но и действия возведения в степень.

Очевидно, что если $a > 0$, то $a^n > 0$; если $a = 0$, то $0^n = 0$.

Итак, ***при возведении неотрицательного числа в степень получаем неотрицательное число***.

При возведении отрицательного числа в степень возможны два случая.

1. Если показатель степени — чётное число, то при возведении в степень множители можно разбить на пары.

Например, $(-2)^6 = ((-2)(-2)) \cdot ((-2)(-2)) \cdot ((-2)(-2))$.

2. Если показатель степени — число нечётное, то один множитель останется без пары.

Например, $(-2)^5 = ((-2)(-2)) \cdot ((-2)(-2)) \cdot (-2)$.

Поскольку каждые два отрицательных множителя в произведении дают положительное число, то верно следующее утверждение.

При возведении отрицательного числа в степень с чётным показателем получаем положительное число, а при возведении отрицательного числа в степень с нечётным показателем получаем отрицательное число.

Можно ли, например, число 5 возвести в степень 0 или в степень -2? Можно. Как это сделать, вы узнаете в курсе алгебры 8 класса.

Пример 1. Решите уравнение $(x - 10)^8 = -1$.

Решение. Так как при возведении в степень с чётным показателем любого числа, кроме 0, получаем положительное число, то данное уравнение не имеет корней.

Ответ: корней нет. ■

Пример 2. Докажите, что значение выражения $10^{200} + 2$ делится нацело на 3.

Решение. Запись значения выражения 10^{200} состоит из цифры 1 и двухсот цифр 0, а запись значения выражения $10^{200} + 2$ — из цифры 1, цифры 2 и ста девяноста девяти цифр 0. Следовательно, сумма цифр числа, являющегося значением данного выражения, равна 3. Значит, само это число делится нацело на 3. ■

Пример 3. Докажите, что значение выражения $9^n - 1$ делится нацело на 10 при любом чётном значении n.

Решение. Если n — чётное число, то выражение 9^n можно представить в виде произведения, содержащего чётное количество девяток. Тогда можно записать $9^n = (9 \cdot 9)(9 \cdot 9)...(9 \cdot 9)$. Поскольку $9 \cdot 9 = 81$, то последней цифрой значения выражения $(9 \cdot 9)(9 \cdot 9)...(9 \cdot 9)$ является единица. Поэтому последней цифрой значения выражения $9^n - 1$ является нуль. Следовательно, значение выражения $9^n - 1$ делится нацело на 10 при любом чётном значении n. ■

?

1. Что называют степенью числа a с натуральным показателем n, большим 1?
2. Как читают запись a^n; a^2; a^3?
3. Что называют степенью числа a с показателем 1?
4. Чему равно значение выражения 0^n при любом натуральном значении n?
5. Какое число, положительное или отрицательное, получают при возведении в степень положительного числа?
6. Каким числом, положительным или отрицательным, является значение степени отрицательного числа, если показатель степени является чётным числом? Нечётным числом?

Упражнения

5.1. Прочитайте выражение, назовите основание и показатель степени:

1) 9^6;	3) $0{,}3^5$;	5) $(-0{,}6)^3$;	7) 73^1;
2) $2{,}4^7$;	4) $(-8)^2$;	6) $(-a)^{11}$;	8) $(3p)^{12}$.

5.2. Упростите выражение, заменив произведение одинаковых множителей степенью:

1) $5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5$;
2) $(-7) \cdot (-7) \cdot (-7)$;
3) $a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a$;
4) $2m \cdot 2m \cdot 2m \cdot 2m \cdot 2m$;
5) $x^2 \cdot x^2 \cdot x^2 \cdot x^2$;
6) $\underbrace{y \cdot y \cdot \ldots \cdot y}_{10 \text{ множителей}}$;
7) $\underbrace{0{,}4 \cdot 0{,}4 \cdot \ldots \cdot 0{,}4}_{k \text{ множителей}}$;
8) $\underbrace{c \cdot c \cdot \ldots \cdot c}_{m \text{ множителей}}$.

5.3. Пользуясь определением степени, представьте в виде произведения степень:

1) 11^6;
2) $0{,}1^4$;
3) $\left(-\frac{1}{6}\right)^2$;
4) $(5c)^3$;
5) $(-3{,}6)^7$;
6) $(a+b)^5$.

5.4. Найдите значение выражения:

1) 2^5;
2) $0{,}6^2$;
3) $1{,}5^3$;
4) 0^6;
5) 1^{12};
6) $(-1)^{12}$;
7) $\left(\frac{3}{4}\right)^4$;
8) $\left(-1\frac{1}{3}\right)^3$.

5.5. Выполните возведение в степень:

1) 7^2;
2) $0{,}5^3$;
3) $1{,}2^2$;
4) $(-1)^7$;
5) $(-0{,}8)^3$;
6) $\left(\frac{1}{6}\right)^4$;
7) $\left(-\frac{1}{2}\right)^6$;
8) $\left(-3\frac{1}{3}\right)^3$.

5.6. Заполните таблицу.

a	2	–2	10	–10	0,1	–0,1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$
a^2								
a^3								
a^4								

5.7. Заполните таблицу.

a	–6	6	–0,4	0,4	3	0,03	$\frac{1}{2}$	–1	0
$10a^2$									
$(10a)^2$									

5.8. Площадь острова Сахалин — самого большого острова России — составляет $7{,}64 \cdot 10^4$ км^2. Выразите эту площадь натуральным числом в квадратных километрах.

5.9. Расстояние от Земли до Солнца равно $1{,}495 \cdot 10^{11}$ м. Выразите это расстояние натуральным числом в метрах.

5.10. Площадь материков и островов Земли составляет $1{,}49 \cdot 10^8$ км^2, а площадь океанов — $3{,}61 \cdot 10^8$ км^2. Выразите эти площади натуральными числами в квадратных километрах.

5.11. Вычислите:
1) $8^2 - 1^{10}$;
2) $0{,}3 \cdot 2^4$;
3) $(4{,}2 - 3{,}8)^4 \cdot 25^2$;
4) $(6^3 : 200 - 0{,}4^2) : 0{,}2^3$.

5.12. Вычислите:
1) $4^3 + 3^5$;
2) $0{,}6^3 - 0{,}4^3$;
3) $0{,}12 \cdot 5^4$.

5.13. Найдите значение выражения:
1) $x^2 - x^3$, если $x = 0{,}1$;
2) $15a^2$, если $a = 0{,}4$;
3) $(x - y)^5$, если $x = 0{,}8$, $y = 0{,}6$;
4) a^2b^3, если $a = 0{,}6$, $b = 0{,}5$;
5) $(x^2 - y^2) : (x - y)$, если $x = 5$, $y = 3$;
6) $(x^2 - y^2) : x - y$, если $x = 5$, $y = 3$;
7) $x^2 - y^2 : (x - y)$, если $x = 5$, $y = 3$;
8) $x^2 - y^2 : x - y$, если $x = 5$, $y = 3$.

5.14. Найдите значение выражения:
1) $16 - c^3$, если $c = 2$;
2) $(16x)^6$, если $x = 0{,}125$;
3) a^3b^2, если $a = 10$, $b = 0{,}1$;
4) $4a^4 - a$, если $a = 3$.

5.15. Не выполняя вычислений, сравните:
1) $(-5{,}8)^2$ и 0;
2) 0 и $(-3{,}7)^3$;
3) $(-12)^7$ и $(-6)^4$;
4) -8^8 и $(-8)^8$;
5) $(-17)^6$ и 17^6;
6) $(-34)^5$ и $(-39)^5$.

5.16. Не выполняя вычислений, сравните:
1) 0 и $(-1{,}9)^{10}$;
2) 0 и $(-76)^{15}$;
3) $(-0{,}1)^{12}$ и $(-12)^{25}$;
4) $\left(-4\frac{7}{9}\right)^9$ и $\left(-5\frac{8}{11}\right)^9$.

5.17. Сравните с нулём значения выражений 2^{100}; $(-2)^{100}$; -2^{100}; $-(-2)^{100}$. Есть ли среди них выражения, принимающие равные значения?

5.18. Сравните с нулём значения выражений 5^{101}; -5^{101}; $(-5)^{101}$; $-(-5)^{101}$. Есть ли среди них выражения, принимающие равные значения?

5.19. Верно ли равенство:
1) $3^2 + 4^2 = 7^2$;
2) $5^2 + 12^2 = 13^2$;
3) $1^2 + 3^2 + 5^2 + 7^2 + 9^2 = 13^2$;
4) $(1 + 2 + 3)^2 = 1^3 + 2^3 + 3^3$?

5.20. Докажите, что $1^2 + 2^2 + 4^2 + 6^2 + 8^2 = 11^2$.

5.21. Расположите в порядке возрастания значения выражений:
1) $0{,}3$; $0{,}3^2$; $0{,}3^3$; 2) $-0{,}4$; $(-0{,}4)^2$; $(-0{,}4)^3$.

5.22. Сравните с нулём значение выражения:
1) $(-4)^7 \cdot (-12)^9$; 3) $(-14)^4 \cdot (-25)^{14}$;
2) $(-5)^6 \cdot (-17)^{11}$; 4) $(-7)^9 \cdot 0^6$.

5.23. Сравните с нулём значение выражения:
1) $(-2)^{14} \cdot (-3)^{15} \cdot (-4)^{16}$; 2) $(-5)^{17} \cdot (-6)^{18} \cdot (-7)^{19}$.

5.24. Запишите:
1) числа 16; 64; 256 в виде степени с основанием 4;
2) числа 0,09; 0,027; 0,00243 в виде степени с основанием 0,3.

5.25. Представьте число: 1) 10 000; 2) -32; 3) 0,125; 4) $-0{,}00001$; 5) $-\frac{8}{343}$ в виде степени с показателем, большим 1, и наименьшим по модулю основанием.

5.26. Составьте числовое выражение и найдите его значение:
1) квадрат разности чисел 7 и 5;
2) разность квадратов чисел 7 и 5;
3) куб суммы чисел 4 и 3;
4) сумма кубов чисел 4 и 3.

5.27. Составьте числовое выражение и найдите его значение:
1) сумма куба числа 5 и квадрата числа 8;
2) куб разности чисел 9 и 8;
3) сумма квадратов чисел 2,5 и 0,25;
4) квадрат суммы чисел 7,8 и 8,2.

5.28. Сколько в 1 км содержится:
1) метров; 2) сантиметров; 3) миллиметров?
Ответ запишите в виде степени числа 10.

5.29. Скорость света в вакууме равна 300 000 км/с.
1) Запишите эту величину, используя степень числа 10.
2) Выразите скорость света в метрах в секунду; запишите результат, используя степень числа 10.

5.30. Сколько в 1 м^2 содержится:
1) квадратных дециметров; 3) квадратных миллиметров?
2) квадратных сантиметров;
Ответ запишите в виде степени числа 10.

5.31. Какие из чисел -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3 являются корнями уравнения:
1) $x^4 = 16$; 3) $x^2 + x = 2$;
2) $x^5 = -243$; 4) $x^3 + x^2 = 6x$?

5.32. При каком значении x равно нулю значение выражения:
1) $(2x - 3)^2$; 2) $(x + 4)^4$; 3) $(6x - 1)^5$?

5.33. Решите уравнение:

1) $x^{10} = -1$; 2) $(x - 5)^4 = -16$.

5.34. При каких натуральных значениях n верно неравенство $8 < 3^n < 85$?

5.35. При каких натуральных значениях m верно неравенство $0{,}07 < 0{,}4^m < 0{,}5$?

◆ ◆ ◆

5.36. Докажите, что выражение $x^2 + (x - 1)^2$ принимает только положительные значения.

5.37. Докажите, что выражение $(x + 1)^2 + |x|$ принимает только положительные значения.

5.38. Докажите, что не имеет положительных корней уравнение:

1) $2x^2 + 5x + 2 = 0$; 2) $x^4 + 3x^3 + 4x^2 + 3x + 1 = 0$.

5.39. Докажите, что не имеет отрицательных корней уравнение:

1) $x^4 - 5x^3 + 6x^2 - 7x + 5 = 0$; 2) $x^8 + x^4 + 1 = x^7 + x^3 + x$.

5.40. При каких значениях x и y верно равенство:

1) $x^2 + y^2 = 0$; 2) $(x - 1)^4 + (y + 2)^6 = 0$?

5.41. При каких значениях x и y верно равенство $x^8 + (y - 3)^2 = 0$?

5.42. При каком значении переменной данное выражение принимает наименьшее значение:

1) $x^2 + 7$; 2) $(x - 1)^4 + 16$?

5.43. При каком значении переменной данное выражение принимает наибольшее значение:

1) $10 - x^2$; 2) $24 - (x + 3)^6$?

5.44. Докажите, что значение выражения:

1) $101^{101} + 103^{103}$ делится нацело на 2;

2) $16^7 + 15^8 - 11^9$ делится нацело на 10;

3) $10^{10} - 7$ делится нацело на 3;

4) $6^n - 1$ делится нацело на 5 при любом натуральном значении n.

5.45. Докажите, что значение выражения:

1) $10^{100} + 8$ делится нацело на 9;

2) $111^n - 6$ делится нацело на 5 при любом натуральном значении n.

5.46. Числа a, b, c и d отличны от нуля. Верно ли, что среди значений выражений $-ab$, $-bc$, cd, $-da$ есть как положительные, так и отрицательные?

5.47. Решите ребус:

1) $\text{М}^3 = \text{КУБ}$; 2) $\text{СМ}^3 = \text{КУБИК}$.

5.48. Решите ребус:

1) $\text{С}^\text{Е} = \text{РЕКА}$; 2) $\text{СОМ}^2 = \text{ОГОГО}$.

5.49. Восстановите запись $\text{ААА}^\text{А} = $ ********.

5.50. Вычислите значение выражения:

$$\left(3\frac{1}{3}\cdot 1{,}3 - 7{,}2\cdot\frac{2}{27} - 9{,}1 : 3{,}5\right) : \frac{2}{5}.$$

5.51. К слитку сплава массой 400 кг, содержащего 15 % меди, добавили 25 кг меди. Каким стало процентное содержание меди в новом слитке?

5.52. В одном мешке было 80 кг сахара, а в другом — 60 кг. Из первого мешка взяли в 3 раза больше сахара, чем из второго, после чего во втором мешке осталось сахара в 2 раза больше, чем в первом. Сколько килограммов сахара взяли из каждого мешка?

5.53. Решите уравнение:

1) $9(2x - 1) - 5(11 - x) = 3(x + 4)$; 2) $5x - 26 = 12x - 7(x - 4)$.

5.54. Известно, что одно из чисел a, b и c положительное, второе — отрицательное, а третье равно нулю, причём $|a| = b^2(b - c)$. Установите, какое из чисел является положительным, какое отрицательным и какое равно нулю.

§ 6 Свойства степени с натуральным показателем

Рассмотрим произведение двух степеней с одинаковыми основаниями, например a^2a^5. Это выражение можно представить в виде степени с основанием a:

$$a^2a^5 = (aa)\cdot(aaaaa) = aaaaaaa = a^7.$$

Значит, $a^2a^5 = a^{2+5}$.

Аналогично легко убедиться в том, что, например, $a^3 \cdot a^2 = a^{3+2} = a^5$, $a \cdot a^9 = a^{1+9} = a^{10}$.

Прослеживается закономерность: $a^ma^n = a^{m+n}$, где m и n — произвольные натуральные числа.

Однако никакое количество конкретных примеров не может гарантировать, что приведённое равенство верно для *любых* натуральных m и n. Истинность его можно установить только путём **доказательства**.

В математике утверждение, справедливость которого устанавливается с помощью доказательства, называют **теоремой**.

Теорема 6.1

Для любого числа a и любых натуральных чисел m и n справедливо равенство:

$$a^ma^n = a^{m+n}.$$

Доказательство.

Для $m > 1$ и $n > 1$ имеем:

$$a^m a^n = \underbrace{(aa \cdot \ldots \cdot a)}_{m \text{ множителей}} \underbrace{(aa \cdot \ldots \cdot a)}_{n \text{ множителей}} = \underbrace{aa \cdot \ldots \cdot a}_{m + n \text{ множителей}} = a^{m+n}.$$

Если, например, $m = 1$ и $n > 1$, то:

$$a \cdot a^n = a \cdot \underbrace{(aa \cdot \ldots \cdot a)}_{n \text{ множителей}} = \underbrace{aa \cdot \ldots \cdot a}_{n + 1 \text{ множителей}} = a^{n+1}.$$

Случаи, когда $m > 1$ и $n = 1$ или когда $m = n = 1$, рассмотрите самостоятельно. ■

Тождество $a^m a^n = a^{m+n}$ выражает **основное свойство степени.**

Аналогичное свойство имеет место для произведения трёх и более степеней. Например,

$3^2 \cdot 3^3 \cdot 3^7 = (3^2 \cdot 3^3) \cdot 3^7 = 3^{2+3} \cdot 3^7 = 3^{(2+3)+7} = 3^{2+3+7} = 3^{12}.$

Итак, ***при умножении степеней с одинаковыми основаниями показатели складывают, а основание оставляют прежним.***

Рассмотрим выражение $a^9 : a^4$, где $a \neq 0$. Оно является частным двух степеней с одинаковыми основаниями. Так как $a^4 \cdot a^5 = a^9$, то по определению частного можно записать $a^9 : a^4 = a^5$, т. е. $a^9 : a^4 = a^{9-4}$. Этот пример подсказывает, что имеет место следующая теорема.

Теорема 6.2

Для любого числа a, отличного от нуля, и любых натуральных чисел m и n таких, что $m > n$, справедливо равенство:

$$a^m : a^n = a^{m-n}.$$

Доказательство.

Рассмотрим произведение степеней a^n и a^{m-n}. Используя основное свойство степени, имеем:

$$a^n \cdot a^{m-n} = a^{n+(m-n)} = a^{n+m-n} = a^m.$$

Тогда по определению частного

$$a^m : a^n = a^{m-n}. \; ■$$

Из этой теоремы следует такое правило:

при делении степеней с одинаковыми основаниями из показателя степени делимого вычитают показатель степени делителя, а основание оставляют прежним.

Рассмотрим выражение $(a^3)^4$. Оно является степенью с основанием a^3 и показателем 4. Поэтому

$$(a^3)^4 = a^3a^3a^3a^3 = a^{3+3+3+3} = a^{3 \cdot 4} = a^{12}.$$

Этот пример подсказывает, что справедлива следующая теорема.

Теорема 6.3

Для любого числа a и любых натуральных чисел m и n справедливо равенство:

$$(a^m)^n = a^{mn}.$$

Доказательство.

Очевидно, что для $n = 1$ доказываемое равенство верно.

Для $n > 1$ имеем:

$$(a^m)^n = \underbrace{a^m a^m \cdot \ldots \cdot a^m}_{n \text{ множителей}} = a^{\overbrace{m + m + \ldots + m}^{n \text{ слагаемых}}} = a^{mn}. \blacksquare$$

Из этой теоремы следует такое правило:

при возведении степени в степень показатели перемножают, а основание оставляют прежним.

Например, $(3^7)^2 = 3^{7 \cdot 2} = 3^{14}$, $(x^k)^3 = x^{k \cdot 3} = x^{3k}$.

Покажем, как можно преобразовать степень произведения, например выражение $(ab)^3$:

$(ab)^3 = (ab) \cdot (ab) \cdot (ab) = (aaa) \cdot (bbb) = a^3b^3$.

В общем случае справедлива следующая теорема.

Теорема 6.4

Для любых чисел a и b и любого натурального числа n справедливо равенство:

$$(ab)^n = a^n b^n.$$

Доказательство.

Очевидно, что для $n = 1$ доказываемое равенство верно. Для $n > 1$ имеем:

$$(ab)^n = \underbrace{(ab) \cdot (ab) \cdot \ldots \cdot (ab)}_{n \text{ множителей}} = \underbrace{(aa \cdot \ldots \cdot a)}_{n \text{ множителей}} \underbrace{(bb \cdot \ldots \cdot b)}_{n \text{ множителей}} = a^n b^n. \blacksquare$$

Аналогичное свойство имеет место и для произведения трёх или более множителей. Например, $(abc)^n = ((ab) \cdot c)^n = (ab)^n \cdot c^n = a^n b^n c^n$.

Итак, ***при возведении произведения в степень каждый множитель возводят в степень и полученные результаты перемножают.***

Пример 1. Упростите выражение: 1) $(a^5)^2 \cdot (a^6)^7$; 2) $(-a^4)^9$; 3) $(-a^4)^8$.

Решение. 1) Применив последовательно правило возведения степени в степень и правило умножения степеней с одинаковым основанием, получим:

$$(a^5)^2 \cdot (a^6)^7 = a^{10} \cdot a^{42} = a^{52}.$$

2) Так как $-a^4 = -1 \cdot a^4$, то, применив правило возведения произведения в степень, получим:

$$(-a^4)^9 = (-1 \cdot a^4)^9 = (-1)^9 \cdot (a^4)^9 = -1 \cdot a^{36} = -a^{36}.$$

3) Имеем: $(-a^4)^8 = (-1 \cdot a^4)^8 = (-1)^8(a^4)^8 = 1 \cdot a^{32} = a^{32}$. ■

Пример 2. Представьте в виде степени выражение $216a^3b^6$.

Решение. Имеем: $216a^3b^6 = 6^3 \cdot a^3 \cdot (b^2)^3 = (6ab^2)^3$. ■

Пример 3. Найдите значение выражения $\left(1\frac{1}{3}\right)^7 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^9$.

Решение. $\left(1\frac{1}{3}\right)^7 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^9 = \left(\frac{4}{3}\right)^7 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^7 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \left(\frac{4}{3} \cdot \frac{3}{4}\right)^7 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \left(\frac{3}{4}\right)^2 =$
$= \frac{9}{16}$. ■

Пример 4. Сравните значения выражений:

1) $(-11)^{14} \cdot (-11)^3$ и $(-11)^{16}$;
2) $(-12)^{19}$ и $(-12)^{15}$;
3) 5^{30} и 9^{20};
4) 16^3 и 65^2.

Решение. 1) Имеем: $(-11)^{14} \cdot (-11)^3 = (-11)^{17}$. Заметим, что $(-11)^{17} < 0$. Вместе с тем $(-11)^{16} > 0$.

Следовательно, $(-11)^{14} \cdot (-11)^3 < (-11)^{16}$.

2) Так как $|(-12)^{19}| > |(-12)^{15}|$, а сравниваемые числа отрицательные, то $(-12)^{19} < (-12)^{15}$.

3) Так как $5^{30} = (5^3)^{10} = 125^{10}$ и $9^{20} = (9^2)^{10} = 81^{10}$, то $5^{30} > 9^{20}$.

4) Имеем: $16^3 = (4^2)^3 = (4^3)^2 = 64^2$. Следовательно, $16^3 < 65^2$. ■

Пример 5. Какой цифрой оканчивается значение выражения 2^{100}?

Решение. Имеем: $2^{100} = (2^4)^{25} = 16^{25}$. Поскольку $6 \cdot 6 = 36$, то произведение любых чисел, оканчивающихся на 6, является числом, последняя цифра которого равна 6.

Поэтому если число оканчивается цифрой 6, то любая его степень оканчивается цифрой 6. ■

Пример 6. Сравните значения выражений 127^{23} и 513^{18}.

Решение. Имеем: $127^{23} < 128^{23}$. Запишем: $128^{23} = (2^7)^{23} = 2^{161}$. Имеем: $2^{161} < 2^{162}$. Запишем: $2^{162} = (2^9)^{18} = 512^{18}$. Имеем: $512^{18} < 513^{18}$. Следовательно, $127^{23} < 513^{18}$. ■

? **1.** Запишите тождество, выражающее основное свойство степени.
2. Как умножить степени с одинаковыми основаниями?

3. Как разделить степени с одинаковыми основаниями?

4. Как возвести степень в степень?

5. Как возвести произведение в степень?

Упражнения

6.1. Представьте в виде степени произведение:

1) m^5m^4; 5) $y^3y^5y^9$; 9) $x^4xx^{11}x^2$;
2) xx^7; 6) c^8c^9c; 10) $(ab)^5 \cdot (ab)^{15}$;
3) a^3a^3; 7) $(b-c)^{10}(b-c)^6$; 11) $(2x+3y)^6 \cdot (2x+3y)^{14}$;
4) $6^8 \cdot 6^3$; 8) $11^2 \cdot 11^4 \cdot 11^6$; 12) $(-xy)^2 \cdot (-xy)^7 \cdot (-xy)^9$.

6.2. Представьте в виде степени выражение:

1) a^5a^8; 3) a^9a; 5) $(m+n)^{13} \cdot (m+n)$;
2) a^2a^2; 4) aa^2a^3; 6) $(cd)^8 \cdot (cd)^{18} \cdot (cd)$.

6.3. Замените звёздочку степенью с основанием a, чтобы выполнялось равенство:

1) $a^6 \cdot * = a^{14}$; 2) $* \cdot a^6 = a^7$; 3) $a^{10} \cdot * \cdot a^2 = a^{18}$.

6.4. Представьте выражение a^{12} в виде произведения двух степеней с основаниями a, одна из которых равна:

1) a^6; 2) a^4; 3) a^3; 4) a^5; 5) a.

6.5. Представьте в виде степени частное:

1) $a^{12} : a^3$; 2) $b^6 : b$; 3) $c^7 : c^6$; 4) $(a+b)^8 : (a+b)^4$.

6.6. Найдите значение выражения:

1) $7^7 : 7^5$; 3) $0{,}6^9 : 0{,}6^6$;
2) $10^{18} : 10^{14}$; 4) $\left(-1\frac{1}{8}\right)^5 : \left(-1\frac{1}{8}\right)^3$.

6.7. Выполните деление:

1) $m^{10} : m^2$; 2) $x^5 : x^4$; 3) $y^{18} : y^6$.

6.8. Представьте в виде степени с основанием m выражение:

1) $(m^5)^3$; 2) $(m^3)^4$; 3) $((m^2)^4)^6$; 4) $(m^7)^2 \cdot (m^4)^9$.

6.9. Представьте в виде степени с основанием n выражение:

1) $(n^2)^8$; 2) $(n^9)^5$; 3) $((n^3)^2)^{10}$; 4) $(n^{12})^4 \cdot (n^{21})^2$.

6.10. Представьте степень в виде произведения степеней:

1) $(ab)^6$; 3) $(3c)^7$; 5) $(-0{,}2cd)^4$;
2) $(mnp)^5$; 4) $(-8xy)^3$; 6) $\left(\frac{3}{7}kt\right)^9$.

6.11. Представьте степень в виде произведения степеней:

1) $(ax)^2$; 2) $(xyz)^{12}$; 3) $(7m)^8$; 4) $(-0{,}3bc)^{11}$.

6.12. Упростите выражение:

1) $-x \cdot x^2$; 2) $(-x)^2 \cdot x$; 3) $-x \cdot (-x)^2$; 4) $(-x) \cdot (-x)^2 \cdot (-x)$.

6.13. Упростите выражение:

1) $(-a)^2 \cdot a^3$; 2) $-a^2 \cdot a^3$; 3) $a^2 \cdot (-a)^3$; 4) $-a^2 \cdot (-a)^3$.

6.14. Упростите выражение:

1) $(-a^5)^2$; 2) $(-a^3)^3$; 3) $(-a^4)^7 \cdot (-a^2)^6$.

6.15. Упростите выражение:

1) $((-a^6)^5)^9$; 2) $((-a^{11})^2)^3$.

6.16. Представьте в виде степени выражение:

1) a^3b^3; 3) $9m^2n^2$; 5) $-\frac{27}{343}c^3d^3$;

2) $-m^7$; 4) $64x^3y^3$; 6) $0{,}0001k^4p^4$.

6.17. Представьте в виде степени выражение:

1) $x^{12}y^{12}$; 2) $-125m^3n^3$; 3) $32p^5q^5$; 4) $1\ 000\ 000\ 000a^9b^9c^9$.

6.18. Представьте выражение в виде степени и вычислите его значение (при необходимости воспользуйтесь таблицей степеней чисел 2 и 3):

1) $2^3 \cdot 2^4$; 4) $0{,}5^{12} \cdot 2^{12}$; 7) $\left(\frac{1}{3}\right)^9 \cdot 9^9$;

2) $(3^2)^3$; 5) $2^{12} : 2^8$; 8) $2{,}5^5 \cdot 40^5$.

3) $0{,}2 \cdot 0{,}2^2 \cdot 0{,}2^3$; 6) $(3^4)^5 : 3^{19}$;

6.19. Представьте выражение в виде степени и вычислите его значение (при необходимости воспользуйтесь таблицей степеней чисел 2 и 3):

1) $2^2 \cdot 2^3$; 3) $3^2 \cdot 3 \cdot 3^3$; 5) $7^9 \cdot \left(\frac{1}{14}\right)^9$;

2) $(2^2)^3$; 4) $0{,}3^8 : 0{,}3^5$; 6) $12{,}5^3 \cdot 8^3$.

6.20. Найдите в данных примерах ошибки:

1) $a^4a^3 = a^{12}$; 4) $3^2 \cdot 5^2 = 15^4$; 7) $3 \cdot 4^3 = 12^3$;

2) $a \cdot a = 2a$; 5) $2^2 \cdot 7^3 = 14^5$; 8) $a^7b^7 = (ab)^{14}$;

3) $(a^3)^2 = a^9$; 6) $(2a)^4 = 8a^4$; 9) $a^3b^2 = (ab)^6$.

6.21. Вместо звёздочки запишите такое выражение, чтобы выполнялось равенство:

1) $(*)^4 = c^{20}$; 3) $(*)^n = c^{8n}$;

2) $(*)^2 = c^{14}$; 4) $(*)^7 = c^{7n}$, где n — натуральное число.

6.22. Представьте степень a^7 в виде произведения двух степеней с основанием a всеми возможными способами.

6.23. Представьте в виде степени выражение:

1) a^na^5; 2) aa^n; 3) a^3a^n; 4) $(a^3)^n$; 5) $(a^n)^2 \cdot (a^5)^n$, где n — натуральное число.

6.24. Представьте в виде степени выражение:

1) $2^4 \cdot 2^4$; 2) $2^4 + 2^4$; 3) $2^n \cdot 2^n$; 4) $2^n + 2^n$, где n — натуральное число.

6.25. Представьте в виде степени выражение:

1) $3^5 + 3^5 + 3^5$; 2) $4^k + 4^k + 4^k + 4^k$, где k — натуральное число.

6.26. Докажите, что если сторону квадрата увеличить в n раз, то его площадь увеличится в n^2 раз.

6.27. Во сколько раз увеличится объём куба, если его ребро увеличить в m раз?

6.28. Запишите в виде степени с показателем 2 выражение:

1) a^2b^6; 3) $x^4y^{10}z^{18}$; 5) $81c^{10}d^{32}p^{44}$.

2) x^8y^{14}; 4) $4m^{12}n^{16}$;

6.29. Запишите в виде степени с показателем 3 выражение:

1) a^3b^6; 2) x^9y^{15}; 3) $8x^{12}y^{18}z^{24}$; 4) $0{,}001m^{30}n^{45}$.

6.30. Представьте в виде степени с основанием 5 выражение:

1) 125^6; 2) $(25^4)^2$.

6.31. Представьте в виде степени с основанием –5 выражение:

1) 625^5; 2) $((-25)^2)^3$.

6.32. Представьте в виде степени с основанием 2 выражение:

1) $8^9 \cdot 4^5$; 2) $32 \cdot 16^6 \cdot 64^3$.

6.33. Найдите значение выражения:

1) $(6^4)^4 : (6^5)^3$; 3) $\dfrac{7^{14} \cdot (7^2)^3}{(7^3)^6 \cdot 7^2}$; 5) $\dfrac{3^8 \cdot 7^8}{21^7}$;

2) $8^3 : 4^4$; 4) $\dfrac{25^3 \cdot 125^2}{5^{10}}$; 6) $\dfrac{5^9 \cdot 4^6}{20^6}$.

6.34. Вычислите:

1) $100^5 : 1000^2$; 2) $\dfrac{3^{10} \cdot (3^3)^5}{(3^5)^4 \cdot 3}$; 3) $\dfrac{4^3 \cdot 16^2}{2^{12}}$; 4) $\dfrac{45^{10}}{5^8 \cdot 3^{19}}$.

6.35. Вычислите значение выражения:

1) $\left(1\dfrac{1}{6}\right)^9 \cdot \left(\dfrac{6}{7}\right)^{10}$; 2) $5^{14} \cdot 0{,}2^{12}$; 3) $\left(-1\dfrac{1}{3}\right)^5 \cdot \left(\dfrac{3}{4}\right)^8$.

6.36. Найдите значение выражения:

1) $10^5 \cdot 0{,}1^7$; 2) $1{,}9^{14} \cdot \left(\dfrac{10}{19}\right)^{15}$.

6.37. Сравните значения выражений:

1) $(-5)^{21} \cdot (-5)$ и $(-5)^{24}$; 3) $(-8)^5 \cdot (-8)^4$ и $(-8)^8$;

2) $(-7)^8 \cdot (-7)^7$ и $(-7)^{17}$; 4) $(-6)^3 \cdot (-6)^9$ и $(-6)^{13}$.

6.38. Замените звёздочку степенью так, чтобы выполнялось равенство:

1) $8 \cdot * = 2^8$;

2) $a^n \cdot * = a^{3n+2}$, где n — натуральное число.

6.39. Запишите выражение 3^{24} в виде степени с основанием:

1) 3^3; 2) 3^{12}; 3) 9; 4) 81.

6.40. Запишите выражение 2^{48} в виде степени с основанием:

1) 2^4; 2) 2^{16}; 3) 8; 4) 64.

6.41. Решите уравнение:

1) $x^7 = 6^{14}$; 2) $x^4 = 5^{12}$.

◆ ◆ ◆

6.42. Сравните значения выражений:

1) 2^{300} и 3^{200};
2) 4^{18} и 18^9;
3) 27^{20} и 11^{30};
4) $3^{10} \cdot 5^8$ и 15^9.

6.43. Сравните значения выражений:

1) 10^{40} и $10\,001^{10}$;
2) 124^4 и 5^{12};
3) 8^{12} и 59^6;
4) 6^{14} и $2^{16} \cdot 3^{12}$.

6.44. Умножили квадрат натурального числа на куб натурального числа. Могла ли получиться шестая степень натурального числа?

6.45. Известно, что сумма $625 + 625 + \ldots + 625$ равна 5^{101}. Сколько слагаемых в этой сумме?

6.46. Известно, что сумма $8 + 8 + 8 + \ldots + 8$ равна 4^{87}. Сколько слагаемых в этой сумме?

6.47. Какой цифрой оканчивается значение выражения (n — натуральное число):

1) 4^{100}; 2) 3^{4n}; 3) 4^n; 4) 3^n; 5) $2^n \cdot 3^{n+1}$?

6.48. Какой цифрой оканчивается значение выражения (n — натуральное число):

1) 9^{2n}; 2) 7^{4n}; 3) 7^{2n}; 4) $3^{n+2} \cdot 7^n$?

6.49. Докажите, что значение выражения:

1) $17^8 + 19$ делится нацело на 10;
2) $64^{64} - 1$ делится нацело на 5;
3) $3^{4n} + 14$, где n — натуральное число, делится нацело на 5.

6.50. Докажите, что значение выражения:

1) $4^{40} - 1$; 2) $2004^{171} + 171^{2004}$

делится нацело на 5.

6.51. Представьте число 171 в виде дроби, числитель которой является девятой степенью натурального числа, а знаменатель — десятой.

6.52. Докажите, что любое натуральное число можно представить в виде дроби, числитель которой является четвёртой степенью натурального числа, а знаменатель — пятой.

6.53. Существует ли такое натуральное число, при умножении которого на 2 будет получен квадрат натурального числа, при умножении на 3 — куб натурального числа, при умножении на 5 — пятая степень натурального числа?

6.54. Сравните значения выражений:

1) 126^{12} и 24^{18}; 2) 31^{11} и 17^{14}.

6.55. Докажите, что $48^{25} < 344^{17}$.

6.56. Число $\frac{1}{5^{100}}$ записали в виде конечной десятичной дроби. Найдите последнюю цифру этой записи.

6.57. Существуют ли четыре таких натуральных числа, что каждое из них не делится нацело ни на одно из остальных, а квадрат каждого из этих чисел делится нацело на каждое из остальных?

Упражнения для повторения

6.58. (*Задача из русского фольклора*.) Кум Иван спросил у кума Степана: «Сколько у тебя уток?» Кум Степан ответил: «Уток у меня столько, что как высидят они мне ещё столько утят, да ещё куплю одну утку, да ещё трижды куплю столько, сколько этих уток и утят, то всего будет их у меня 100». Сколько уток было у кума Степана?

6.59. Один маляр может покрасить комнату за 6 ч, а другой — за 4 ч. Сначала первый маляр работал 2 ч, а потом к нему присоединился второй маляр. За сколько часов была покрашена комната?

6.60. От пристани по течению реки отправилась на лодке группа туристов, рассчитывая вернуться через 4 ч. Скорость лодки в стоячей воде составляет 10 км/ч, а скорость течения — 2 км/ч. На какое наибольшее расстояние туристы могут отплыть от пристани, если они хотят перед возвращением сделать остановку на 2 ч?

6.61. Решите уравнение:

1) $2{,}5 - 3x = 3(x - 2{,}5) - 2$;

2) $17(2 - 3x) - 5(x + 12) = 8(1 - 7x) - 34$.

6.62. В шестизначном числе первая и четвёртая, вторая и пятая, третья и шестая цифры одинаковы. Докажите, что это число кратно числам 7, 11 и 13.

§ 7 Одночлены

Рассмотрим выражения: $2b$; $\frac{1}{3}xy^2$; $-ab$; $m^3 \cdot 3k^5$; $(3{,}14)^2 pq^3 \cdot (-7) r^2t^4$.

Каждое из них представляет собой произведение чисел, переменных и их степеней. Такие выражения называют **одночленами**.

Договорились также считать одночленами все числа, любые переменные и их степени. Например, одночленами являются:

$$-5;\ 0{,}3;\ x;\ t^2;\ 2^3.$$

Заметим, что, например, выражения

$$2a + b;\ x - 1;\ a : b;\ y^2 + y - 2$$

одночленами не являются, так как они, кроме умножения и возведения в степень, содержат и другие действия.

При взгляде на одночлен $3ab^3 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right)abc$ возникает естественное желание его упростить. Имеем:

$$3ab^3 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right)abc = 3 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right)aab^3bc = -2a^2b^4c.$$

Полученный одночлен содержит *только один числовой множитель, отличный от нуля, стоящий на первом месте*. Все остальные множители — это степени с *различными* основаниями. Такой вид одночлена называют **стандартным видом одночлена**.

Примеры одночленов стандартного вида:

$$-\frac{1}{8}xy;\ 2{,}8a^3;\ 7x^2yz^3t^5.$$

Отметим, что, например, выражения $a^2 \cdot 2b^3$ и $-3x^2xy^3$ не являются одночленами стандартного вида. Действительно, хотя первое из них и имеет единственный числовой множитель, но он не стоит на первом месте. Во втором — степень с основанием x встречается дважды.

Однако эти одночлены легко **привести** (преобразовать) к стандартному виду:

$$a^2 \cdot 2b^3 = 2a^2b^3 \text{ и } -3x^2xy^3 = -3x^3y^3.$$

К одночленам стандартного вида также относят числа, отличные от нуля, переменные и их степени. Так, -2; 3^2; x; b^3 — одночлены стандартного вида.

Число 0, а также одночлены, тождественно равные нулю, например $0x^2$, $0ab$ и т. п., называют **нуль-одночленами**. Их не относят к одночленам стандартного вида.

Определение

Числовой множитель одночлена, записанного в стандартном виде, называют коэффициентом одночлена.

Например, коэффициенты одночленов $-3a^2bc$ и $0{,}07x$ соответственно равны -3 и $0{,}07$.

Вообще, любой одночлен стандартного вида имеет коэффициент. Например, у одночленов x^2y и $-mn$, при записи которых числовой множитель не используется, коэффициентами являются числа 1 и –1 соответственно. И это понятно, ведь $x^2y = 1 \cdot x^2y$, $-mn = -1 \cdot mn$.

Рассмотрим одночлены $\frac{2}{3}x^3yz$ и $-2zx^3y$. У них одинаковые буквенные части. Такие одночлены называют **подобными**. К подобным одночленам также относят и числа. Например, 7 и –5 — подобные одночлены.

Обратим внимание на то, что, например, у одночленов $\frac{2}{3}x^3y^2z$ и $-2zx^3y$ буквенные части неодинаковы, хотя и состоят из одних и тех же переменных. Поэтому они не являются подобными.

Определение

Степенью одночлена называют сумму показателей степеней всех переменных, входящих в него. Степень одночлена, который является числом, отличным от нуля, считают равной нулю.

Например, степень одночлена $-3{,}8m^2xy^7$ равна 10, а степени одночленов x^3 и 9 равны соответственно 3 и 0.

Считают, что нуль-одночлен степени не имеет.

Рассмотрим два одночлена $\frac{1}{5}ab^3$ и $10abx$. Одночлен $\frac{1}{5}ab^3 \cdot 10abx$ является их произведением. Упростим его:

$$\frac{1}{5}ab^3 \cdot 10abx = \left(\frac{1}{5} \cdot 10\right)(aa)(b^3b)x = 2a^2b^4x.$$

Итак, *произведение двух одночленов — это одночлен*. Его, как правило, записывают в стандартном виде.

При возведении одночлена в степень также получают одночлен. Возведём, например, в четвёртую степень одночлен $-\frac{1}{2}xy^3z^2$. Имеем:

$$\left(-\frac{1}{2}xy^3z^2\right)^4 = \left(-\frac{1}{2}\right)^4 \cdot x^4 \cdot (y^3)^4 \cdot (z^2)^4 = \frac{1}{16}x^4y^{12}z^8.$$

Пример 1. Упростите выражение $0{,}2a^2b^4 \cdot (-5a^3b)^2$.

Решение.

$0{,}2a^2b^4 \cdot (-5a^3b)^2 = 0{,}2a^2b^4 \cdot (-5)^2 \cdot (a^3)^2b^2 = 0{,}2a^2b^4 \cdot 25a^6b^2 = 0{,}2 \cdot 25a^2a^6b^4b^2 = 5a^8b^6$. ■

Пример 2. Значения переменных a и b таковы, что $4a^3b^4 = 7$. Найдите значение выражения $-\frac{2}{7}a^6b^8$.

Решение.

$$-\frac{2}{7}a^6b^8 = -\frac{1}{56}\cdot 16a^6b^8 = -\frac{1}{56}\cdot(4a^3b^4)^2 = -\frac{1}{56}\cdot 7^2 = -\frac{1}{56}\cdot 49 = -\frac{7}{8}.$$ ■

1. Какие выражения называют одночленами?
2. Объясните, какой вид одночлена называют его стандартным видом.
3. Что называют коэффициентом одночлена?
4. Какие одночлены называют подобными?
5. Что называют степенью одночлена?

Упражнения

7.1. Являются ли одночленом выражение:

1) $5xy$; 4) 8; 7) $\frac{6m^2k^3}{11a^5}$; 10) $3(a^2 - b^2)$;

2) $-\frac{1}{3}a^2b^3c$; 5) 0; 8) b^9; 11) $-2\frac{4}{9}aa^2b^3b^6$;

3) $m + n$; 6) $\frac{4}{7}pk^4$; 9) m^4m; 12) $\left(-1\frac{1}{8}\right)^2 x^5x^3yz^{10}$?

7.2. Укажите, какие из одночленов записаны в стандартном виде:

1) $5mnm^2$; 3) $-7t^3\cdot 4t^5$; 5) $\frac{6}{13}x^8y^9$;

2) $1{,}4ab^7c^3$; 4) $-abc$; 6) $m^6n^4\cdot 10$.

7.3. Являются ли подобными одночлены:

1) $5a$ и $7a$; 3) $8x^2y^4$ и $8x^2y^5$; 5) $\frac{1}{2}m^7n^8$ и $\frac{1}{2}m^8n^7$;

2) $3a^2b^3c$ и $6a^2b^3c$; 4) $3y^2$ и $2y^3$; 6) $-0{,}1a^9b^{10}$ и $0{,}1a^9b^{10}$?

7.4. Запишите одночлен, подобный данному, коэффициент которого в 4 раза больше коэффициента данного одночлена:

1) $1{,}4x^3y^7$; 2) $c^4d^{10}p^2$; 3) $1\frac{1}{4}a^5b^5c^9$.

7.5. Приведите одночлен к стандартному виду, укажите его коэффициент и степень:

1) $9a^4aa^6$; 3) $7a\cdot(-9ac)$; 5) $-5x^2\cdot 0{,}1x^2y\cdot(-2y)$;

2) $3x\cdot 0{,}4y\cdot 6z$; 4) $-3\frac{1}{3}m^5\cdot 9mn^9$; 6) $c\cdot(-d)\cdot c^{18}$.

7.6. Представьте одночлен в стандартном виде, подчеркните его коэффициент:

1) $6bb^2$; 3) $-0{,}8u^4\cdot 4t^3\cdot(-2t^7)$;

2) $1{,}5c^3d^4\cdot 8c^2d^5$; 4) $4{,}5a^2bc^7\cdot\frac{1}{9}a^8b^6c$.

7.7. Найдите значение одночлена:

1) $5x^2$, если $x = -4$;

2) $-4{,}8a^4b^3$, если $a = -1$, $b = \frac{1}{2}$;

3) $0{,}04c^3d^5$, если $c = -10$, $d = 2$;

4) $\frac{4}{9}m^3n^2p^3$, если $m = -3$, $n = 5$, $p = -1$.

7.8. Найдите значение одночлена:

1) $3m^3$, если $m = -3$;

2) $\frac{7}{16}a^2b^4$, если $a = -\frac{1}{7}$, $b = 2$;

3) $0{,}8m^2n^2k$, если $m = 0{,}3$, $n = \frac{1}{2}$, $k = 2000$.

7.9. Выполните умножение одночленов:

1) $0{,}6a^4b^3 \cdot 4a^2b$;

2) $-2{,}8x^2y^5 \cdot 0{,}5x^4y^6$;

3) $13c^2d \cdot (-3cd)$;

4) $0{,}7x^6y^9 \cdot 0{,}3xy$;

5) $-\frac{3}{20}p^2q^8 \cdot \frac{40}{81}p^8q^2$;

6) $-6\frac{1}{2}mn^8p^{11} \cdot 3\frac{5}{13}m^5n^5$.

7.10. Упростите выражение:

1) $12a^2 \cdot 5a^3b^7$;

2) $-4m^3 \cdot 0{,}25m^6$;

3) $3ab \cdot (-17a^2b)$;

4) $56x^5y^{14} \cdot \frac{2}{7}x^2y$;

5) $-\frac{1}{3}p^2 \cdot (-27k) \cdot 5pk$;

6) $2\frac{1}{4}b^2c^5d^3 \cdot \left(-3\frac{1}{3}b^3c^4d^7\right)$.

7.11. Преобразуйте в одночлен стандартного вида выражение:

1) $(3a^2b)^2$;

2) $(-0{,}2x^3y^4)^3$;

3) $(-10m^2y^8)^5$;

4) $(16x^6y^7z^8)^2$;

5) $\left(-\frac{1}{5}c^6d\right)^4$;

6) $\left(1\frac{1}{2}a^8b^9\right)^6$.

7.12. Выполните возведение в степень:

1) $(-6m^3n^3)^3$;

2) $(-7x^9y^{10})^2$;

3) $(0{,}5a^{12}b^{14})^2$;

4) $(3ab^4c^5)^4$;

5) $\left(-\frac{1}{2}x^8y^9\right)^5$;

6) $\left(2\frac{1}{7}a^6b^8\right)^2$.

◆ ◆

7.13. Представьте данное выражение в виде произведения двух одночленов, один из которых равен $3a^2b^6$:

1) $3a^6b^8$; 2) $-12a^2b^{10}$; 3) $-2{,}7a^5b^7$; 4) $2\frac{2}{7}a^{20}b^{30}$.

7.14. Каким одночленом надо заменить звёздочку, чтобы выполнялось равенство:

1) $* \cdot 3b^4 = 12b^6$;
2) $-5a^5b^2 \cdot * = -20a^6b^8$;
3) $-7a^3b^9 \cdot * = 4{,}2a^5b^{12}$;
4) $23a^{12}b^{16} \cdot * = -23a^{29}b^{17}$?

7.15. Выполните умножение одночленов, где m и n — натуральные числа:

1) $2\frac{5}{6}a^{n+2}b^{m+3} \cdot \frac{9}{17}a^{5n-4}b^{2m-1}$;

2) $-7\frac{1}{3}a^{2n-1}b^{3n-1} \cdot 1\frac{1}{11}a^{n+6}b^{3n+1}$.

7.16. Представьте в виде квадрата одночлена стандартного вида выражение:

1) $4a^{10}$; 2) $36a^8b^2$; 3) $0{,}16a^{14}b^{16}$; 4) $289a^{20}b^{30}c^{40}$.

7.17. Представьте в виде куба одночлена стандартного вида выражение:

1) $8x^6$; 2) $-27x^3y^9$; 3) $0{,}001x^{12}y^{18}$; 4) $-\frac{125}{216}x^{15}y^{21}z^{24}$.

7.18. Представьте одночлен $64a^6b^{12}$ в виде:

1) произведения двух одночленов, один из которых равен $2a^2b^8$;
2) квадрата одночлена стандартного вида;
3) куба одночлена стандартного вида.

7.19. Представьте одночлен $81m^4n^{16}$ в виде:

1) произведения двух одночленов, один из которых равен $-\frac{1}{3}mn^{14}$;
2) квадрата одночлена стандартного вида;
3) четвёртой степени одночлена стандартного вида.

7.20. Упростите выражение:

1) $2a^3 \cdot (-5a^4b^5)^2$;
2) $(-x^6y)^3 \cdot 11x^4y^5$;
3) $(-0{,}6a^3b^5c^6)^2 \cdot 3a^2c^8$;
4) $-1\frac{3}{11}m^4n^9 \cdot \left(-\frac{1}{7}mn^3\right)^2$;
5) $1\frac{7}{9}x^7y^2 \cdot \left(\frac{3}{4}x^2y^9\right)^4$;
6) $-(-2c^2d^5)^7 \cdot \left(-\frac{1}{2}c^4d^5\right)^4$.

7.21. Упростите выражение:

1) $20a^8 \cdot (9a)^2$;
2) $(-b^5)^4 \cdot 12b^6$;
3) $(3m^6n^3)^4 \cdot \left(-\frac{1}{81}m^9n\right)$;
4) $(0{,}2x^7y^8)^3 \cdot 6x^2y^2$;
5) $\left(-\frac{1}{2}ab^4\right)^3 \cdot (4a^6)^2$;
6) $\left(-\frac{2}{3}x^2y\right)^5 \cdot \left(-\frac{3}{4}xy^2\right)^2$.

7.22. Замените звёздочки такими одночленами, чтобы выполнялось равенство:

1) $(*)^2 \cdot (*)^3 = 9a^2b^3c^5$;
2) $(*)^3 \cdot (*)^4 = 16a^7b^6c^8$;
3) $(*)^3 \cdot (*)^2 = -72m^8n^{11}$;
4) $(*)^2 \cdot (*)^5 = 32x^{29}y^{21}z^9$.

7.23. Замените звёздочки такими одночленами, чтобы выполнялось равенство:

1) $(*)^2 \cdot (*)^3 = 72m^7n^{11}$;
2) $(*)^3 \cdot (*)^4 = -81x^{10}y^{17}z^{13}$;
3) $(*)^2 \cdot (*)^5 = -288a^9b^{11}c^{12}$.

7.24. Значения переменных x и y таковы, что $5x^2y^4 = 6$. Найдите значение выражения:

1) $1,5x^2y^4$;
2) $25x^4y^8$;
3) $-25x^6y^{12}$.

7.25. Значения переменных a и b таковы, что $3ab^3 = 4$. Найдите значение выражения:

1) $-1,2ab^3$;
2) $27a^3b^9$;
3) $-\frac{2}{3}a^2b^6$.

7.26. Значения переменных a, b и c таковы, что $2a^2b = 7$, $a^3c^2 = 2$. Найдите значение выражения:

1) $6a^5bc^2$;
2) $a^7b^2c^2$;
3) $2\frac{1}{7}a^8bc^4$.

7.27. Значения переменных m, n и p таковы, что $m^3n^2 = 3$, $\frac{1}{3}n^3p^2 = 5$. Найдите значение выражения:

1) $m^3n^5p^2$;
2) $2m^3n^8p^4$;
3) $-0,4m^{12}n^{11}p^2$.

Упражнения для повторения

7.28. Некоторое число сначала уменьшили на 10 %, а потом результат увеличили на 20 %. После этого получили число, которое на 48 больше данного. Найдите данное число.

7.29. (*Задача из русского фольклора.*) Летела стая гусей, а навстречу ей летит один гусь и говорит: «Здравствуйте, сто гусей!» «Нас не сто гусей, — отвечает ему вожак стаи, — если бы нас было столько, сколько сейчас, да ещё столько, да полстолько, да четверть столько, да ещё ты, гусь, тогда нас было бы сто гусей». Сколько было в стае гусей?

7.30. Замените звёздочки такими цифрами, чтобы:

1) число $*5*$ делилось нацело на 3 и на 10;
2) число $13*2*$ делилось нацело на 9 и на 5;
3) число $58*$ делилось нацело на 2 и на 3.

Найдите все возможные решения.

§ 8 Многочлены

В предыдущем параграфе вы узнали, что произведение одночленов всегда является одночленом. Иначе обстоит дело с суммой одночленов. Например, выражения $2a + b^2$ и $2a - b^2$ не являются одночленами. Первое из них представляет собой сумму одночленов $2a$ и b^2, а второе — сумму одночленов $2a$ и $-b^2$.

Определение

Выражение, которое является суммой нескольких одночленов, называют многочленом.

Примеры многочленов:

$7xy + y - 11$; $x^4 - 2x^3 + 5x^2 - x + 1$; $3a - a + b$; $11x - 2x$.

Одночлены, из которых составлен многочлен, называют **членами многочлена**. Так, членами многочлена $7xy + y - 11$ являются одночлены $7xy$, y и -11.

Многочлен, состоящий из двух членов, называют **двучленом**, а из трёх членов — **трёхчленом**. Договорились рассматривать одночлен как частный случай многочлена. Считают, что такой многочлен состоит из одного члена.

Связи между многочленами, одночленами и их частным видом — числами иллюстрирует схема на рисунке 8.1.

Рис. 8.1

Если среди одночленов, составляющих многочлен, есть подобные, то их называют **подобными членами многочлена**. Например, в многочлене $\underline{7a^2b} - \underline{\underline{3a}} + \underline{\underline{\underline{4}}} - \underline{a^2b} - \underline{\underline{\underline{1}}} + \underline{\underline{a}} + b$ подобные члены подчёркнуты одинаковым количеством чёрточек.

Используя правило приведения подобных слагаемых, упростим этот многочлен:

$$7a^2b - 3a + 4 - a^2b - 1 + a + b = 6a^2b - 2a + b + 3.$$

Такое упрощение называют **приведением подобных членов многочлена**. Это преобразование позволяет заменить многочлен на тождественно равный ему, но более простой — с меньшим количеством членов.

Рассмотрим многочлен $2x^3y - xy + 1$. Этот многочлен составлен из одночленов стандартного вида, среди которых нет подобных.

Определение

Многочлен, состоящий из одночленов стандартного вида, среди которых нет подобных, называют многочленом стандартного вида.

Многочлены $xy^2 + x^2y$, $2a^2b$, 5 являются примерами многочленов стандартного вида.

Заметим, что многочлен $3bab^2 + a \cdot 5 + a \cdot 2b^3 - a$ не является многочленом стандартного вида. Однако, записав в стандартном виде одночлены, из которых он составлен, а затем приведя подобные члены, его можно преобразовать в многочлен стандартного вида.

Имеем: $3bab^2 + a \cdot 5 + a \cdot 2b^3 - a = \underline{3ab^3} + \underline{\underline{5a}} + \underline{2ab^3} - \underline{\underline{a}} = 5ab^3 + 4a$.

Рассмотрим многочлен стандартного вида $2x^3y - x^2y^2 + 5x^2y + y - 2$. Он составлен из одночленов: $2x^3y$, $-x^2y^2$, $5x^2y$, y, -2, степени которых соответственно равны числам 4, 4, 3, 1, 0. Наибольшая из этих степеней равна числу 4. В таком случае говорят, что степень многочлена $2x^3y - x^2y^2 + 5x^2y + y - 2$ равна 4.

Определение

Степенью многочлена стандартного вида называют наибольшую из степеней одночленов, из которых составлен этот многочлен.

Приведём ещё примеры:
степень многочлена $3x^2 - xy + 5y^2$ равна двум,
степень многочлена $3x^4y^2$ равна шести,
степень многочлена 3 равна нулю.

Рассмотрим многочлены $3x - 3$, $5y^2 - 3y + 1$, $a^4 + 7a^3 - a + 2$, $2b^5 - b^3 + 2b^2 - 3b$. Все они являются многочленами стандартного вида с одной переменной. Любой многочлен n-й степени с одной переменной, где n — натуральное число, может быть представлен в виде

$$a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_1x + a_0, \qquad (*)$$

где x — переменная, $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n$ — некоторые числа, причём $a_n \neq 0$.

Если многочлен n-й степени с одной переменной, где n — натуральное число, представлен в виде (*), то числа $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n$ называют **коэффициентами многочлена** с одной переменной. Число a_n называют **старшим коэффициентом**, а число a_0 — **свободным членом**.

Например, коэффициенты многочлена $2x - 3$ таковы: $a_0 = -3$, $a_1 = 2$. Коэффициенты многочлена $5y^2 - 3y + 1$ таковы: $a_0 = 1$, $a_1 = -3$, $a_2 = 5$.

Чтобы найти коэффициенты многочлена $x^4 + 7x^3 - x$, представим его в виде (*), т. е. так: $x^4 + 7x^3 + 0x^2 - x + 0$. Тогда $a_0 = 0$, $a_1 = -1$, $a_2 = 0$, $a_3 = 7$, $a_4 = 1$.

Число 0, а также многочлены, тождественно равные нулю (например, $0a + 0b$, $x - x$ и т. п.), называют **нуль-многочленами**. Их не относят к многочленам стандартного вида.

Считают, что нуль-многочлен степени не имеет.

? **1.** Что называют многочленом?
2. Какой многочлен называют двучленом? Трёхчленом?
3. Что называют подобными членами многочлена?
4. Какой многочлен называют многочленом стандартного вида?
5. Что называют степенью многочлена стандартного вида?
6. Как найти коэффициенты многочлена n-й степени с одной переменной?

Упражнения

8.1. Назовите одночлены, суммой которых является данный многочлен:
1) $-5a^4 + 3a^2 - a + 8$;
2) $6x^3 - 10x^2y + 7xy^2 + y^3$;
3) $t^3 + 3t^2 - 4t + 5$;
4) $1{,}8a^3b - 3{,}7a^2b^2 + 16ab^3 - b^4$.

8.2. Найдите значение многочлена:
1) $2x^2 + x - 3$ при $x = 0{,}5$;
2) $x^3 + 5xy$ при $x = 3$, $y = -2$;
3) $a^2 - 2ab + b^2$ при $a = -4$, $b = 6$;
4) $y^4 + 7y^3 - 2y^2 - y + 10$ при $y = -1$.

8.3. Найдите значение многочлена $2y^3 - 3y^2 + 4y - 6$ при:
1) $y = 1$; 2) $y = 0$; 3) $y = -5$.

8.4. Преобразуйте многочлен в многочлен стандартного вида. Укажите его степень:
1) $4b^2 + a^2 + 9ab - 18b^2 - 9ab$;
2) $8m^3 - 13mn - 9n^2 - 8m^3 - 2mn$;
3) $2a^2b - 7ab^2 - 3a^2b + 2ab^2$;
4) $0{,}9c^4 + 1{,}1c^2 + c^4 - 0{,}6c^2$;
5) $3x^2 + 6x - 5 - x^2 - 10x + 3$;
6) $b^3 - 3bc + 3b^3 + 8bc - 4b^3$.

8.5. Преобразуйте многочлен в многочлен стандартного вида. Укажите его степень:
1) $5x^2 - 10x + 9 - 2x^2 + 14x - 20$;
2) $-m^5 + 2m^4 - 6m^5 + 12m^3 - 18m^3$;
3) $0{,}2a^3 + 1{,}4a^2 - 2{,}2 - 0{,}9a^3 + 1{,}8a^2 + 3$;
4) $6x^2y - xy^2 - 8x^2y + 2xy^2 - xy + 7$.

8.6. Приведите подобные члены и найдите значение многочлена при указанных значениях переменных:

1) $-3a^5 + 4a^3 + 7a^5 - 10a^3 + 12a$, если $a = -2$;
2) $x^3y - 3xy^2 - 4x^3y + 8xy^2$, если $x = -1$, $y = -3$;
3) $0{,}8x^2 - 0{,}3x - x^2 + 1{,}6 + 1{,}1x - 0{,}6$, если $x = 5$;
4) $\frac{1}{3}a^2c + \frac{3}{4}ac^2 + \frac{1}{6}a^2c + 1{,}25ac^2$, если $a = -4$, $c = 3$.

8.7. Приведите подобные члены и найдите значение многочлена при указанных значениях переменных:

1) $2a^3 + 3ab - b^2 - 6a^3 - 7ab + 2b^2$, если $a = 2$, $b = -6$;
2) $mn - 6mn^2 - 8mn - 6mn^2$, если $m = 0{,}5$, $n = -2$;
3) $10xy^2 - 12x^2y + 9x^2y - 9xy^2$, если $x = \frac{1}{3}$, $y = 9$.

8.8. Из одночленов $4a$, $-3ab$, $7a^2$, $-8a^2$, $9ab$, $5a$ выберите несколько и составьте из них:

1) многочлен стандартного вида;
2) многочлен, содержащий подобные члены;
3) два многочлена стандартного вида.

8.9. Найдите коэффициенты многочлена с одной переменной. Укажите старший коэффициент и свободный член:

1) $-3x^4 + 2x^3 - \frac{1}{2}x^2 + x - 5$; 2) $4a^3 + 1$; 3) $y^4 + y$.

8.10. Найдите коэффициенты многочлена с одной переменной. Укажите старший коэффициент и свободный член:

1) $\frac{5}{9}x^3 + x^2 - x - 4$; 2) $-0{,}7b^2 + 2b$; 3) m^4.

Упражнения для повторения

8.11. Конфеты ценой 70 р. за 1 кг смешали с конфетами ценой 95 р. за 1 кг и получили смесь ценой 80 р. за 1 кг. Какая масса конфет каждого вида содержится в 1 кг смеси?

8.12. На почте продаётся 20 разных конвертов и 15 разных марок. Сколько существует вариантов приобретения конверта с маркой?

§ 9 Сложение и вычитание многочленов

Пусть надо сложить два многочлена $3xy^2 + 5x^2y^2 - 7xy + x + 11$ и $-2xy^2 + x^2y^2 + 2xy + y - 2$. Для этого возьмём их в скобки и поставим между ними знак «плюс». Затем раскроем скобки и приведём подобные слагаемые.

Имеем:

$$(3xy^2 + 5x^2y^2 - 7xy + x + 11) + (-2xy^2 + x^2y^2 + 2xy + y - 2) =$$
$$= 3xy^2 + 5x^2y^2 - 7xy + x + 11 - 2xy^2 + x^2y^2 + 2xy + y - 2 =$$
$$= xy^2 + 6x^2y^2 - 5xy + x + y + 9.$$

Полученный многочлен является суммой двух данных многочленов.

Пусть теперь требуется из первого из данных многочленов вычесть второй. Для этого каждый из многочленов возьмём в скобки и поставим перед вычитаемым знак «минус». Затем раскроем скобки и приведём подобные слагаемые.

Имеем:

$$(3xy^2 + 5x^2y^2 - 7xy + x + 11) - (-2xy^2 + x^2y^2 + 2xy + y - 2) =$$
$$= 3xy^2 + 5x^2y^2 - 7xy + x + 11 + 2xy^2 - x^2y^2 - 2xy - y + 2 =$$
$$= 5xy^2 + 4x^2y^2 - 9xy + x - y + 13.$$

Полученный многочлен является разностью двух данных многочленов.

Вообще, *при сложении и вычитании многочленов всегда получается многочлен*.

Пример 1. Докажите, что разность двузначного числа и числа, записанного теми же цифрами, но в обратном порядке, делится нацело на 9.

Решение. Пусть данное число содержит a десятков и b единиц. Тогда оно равно $10a + b$.

Число, записанное теми же цифрами в обратном порядке, равно $10b + a$.

Рассмотрим разность $(10a + b) - (10b + a) = 10a + b - 10b - a = 9a - 9b = 9(a - b)$.

Очевидно, что число $9(a - b)$ делится нацело на 9. ■

Запись $\overline{ab}$ является обозначением двузначного числа, содержащего a десятков и b единиц, т. е. $\overline{ab} = 10a + b$.

Аналогично запись $\overline{abc}$ является обозначением трёхзначного числа, содержащего a сотен, b десятков и c единиц, т. е. $\overline{abc} = 100a + 10b + c$.

Пример 2. Докажите, что разность $\left(\overline{ab} + \overline{ac} + \overline{bc}\right) - \left(\overline{ba} + \overline{ca} + \overline{cb}\right)$ делится нацело на 18.

Решение. Имеем: $(\overline{ab}+\overline{ac}+\overline{bc})-(\overline{ba}+\overline{ca}+\overline{cb}) = (10a + b + 10a + c + 10b + c) - (10b + a + 10c + a + 10c + b) = (20a + 11b + 2c) - (20c + 11b + 2a) = 20a + 11b + 2c - 20c - 11b - 2a = 18a - 18c = 18(a - c)$.

Очевидно, что число $18(a - c)$ делится нацело на 18. ■

Пример 3. Докажите, что сумма четырёх последовательных чётных натуральных чисел не делится нацело на 8.

Решение. Пусть первое из этих чисел равно $2n$, где n — произвольное натуральное число. Тогда следующими тремя числами являются $2n + 2$, $2n + 4$, $2n + 6$ соответственно.

Рассматриваемая сумма имеет вид $2n + (2n + 2) + (2n + 4) + (2n + 6) = 8n + 12$.

Первое слагаемое $8n$ суммы $8n + 12$ делится нацело на 8, а второе слагаемое 12 — не делится. Следовательно, сумма $8n + 12$ не делится нацело на 8. ■

Упражнения

9.1. Найдите сумму многочленов:

1) $-5x^2 - 4$ и $8x^2 - 6$; 2) $2x + 16$ и $-x^2 - 6x - 20$.

9.2. Найдите разность многочленов:

1) $x^2 + 8x$ и $4 - 3x$; 3) $4x^2 - 7x + 3$ и $x^2 - 8x + 11$;
2) $2x^2 + 5x$ и $4x^2 - 2x$; 4) $9m^2 - 5m + 4$ и $-10m + m^3 + 5$.

9.3. Упростите выражение:

1) $(5a^4 + 3a^2b - b^3) - (3a^4 - 4a^2b - b^2)$;
2) $(12xy - 10x^2 + 9y^2) - (-14x^2 + 9xy - 14y^2)$;
3) $(7ab^2 - 8ab + 4a^2b) + (10ab - 7a^2b)$;
4) $(2c^2 + 3c) + (-c^2 + c) - (c^2 + 4c - 1)$.

9.4. Упростите выражение:

1) $(3x^2 - 2x) + (-x^2 + 3x)$;
2) $(4c^2 - 2cd) - (10c^2 + 8cd)$;
3) $(12m^2 - 7n - 3mn) - (6mn - 10n + 14m^2)$;
4) $(3n^3 - 2mn + 4m^3) - (2mn + 3n^3)$.

9.5. Какой двучлен надо прибавить к данному двучлену, чтобы их сумма была тождественно равна нулю:

1) $a + b$; 2) $a - b$; 3) $-a - b$?

9.6. Решите уравнение:

1) $3x^2 - (2x^2 - 8x) - (x^2 - 3) = x$;
2) $12 - (6 - 9x - x^2) = x^2 + 5x - 14$;
3) $4y^3 - (4y^3 - 8y) - (6y + 3) = 7$;
4) $(y^2 - 4y - 17) - (6y^2 - 3y - 8) = 1 - y - 5y^2$.

9.7. Решите уравнение:

1) $(5x^2 - 3) - (2x + 5) = 5x^2$;

2) $x^2 - (x + 1) - (x^2 - 7x + 32) = 3$;

3) $(y^3 + 3y - 8) - (5y - y^3 + 7) = 2y^3 - 2y - 15$.

9.8. Докажите тождество:

1) $(a^2 + b^2 - c^2) - (b^2 + c^2 - a^2) + (c^2 - a^2) = a^2 - c^2$;

2) $(4 - 3a^2) - a^2 + (7 + 2a^2) - (-2a^2 + 11) = 0$;

3) $(x^3 + 4x^2) - (x + 6) + (1 + x - x^3) = 4x^2 - 5$.

9.9. Докажите тождество:

1) $4a^2 - (6a^2 - 2ab) + (3ab + 2a^2) = 5ab$;

2) $(9x^6 - 4x^3) - (x^3 - 9) - (8x^6 - 5x^3) = x^6 + 9$.

9.10. Найдите значение выражения:

1) $(5a^3 - 20a^2) - (4a^3 - 18a^2)$, если $a = -3$;

2) $4b^2 - (7b^2 - 3bc) + (3b^2 - 7bc)$, если $b = -1{,}5$, $c = 4$.

9.11. Вычислите значение выражения:

1) $(5{,}7a^2 - 2{,}1ab + b^2) - (3{,}9ab - 0{,}3a^2 + 2b^2)$, если $a = -1$, $b = 5$;

2) $(5m^2n - m^3) + 7m^3 - (6m^3 - 3m^2n)$, если $m = -\frac{2}{3}$, $n = \frac{3}{16}$.

9.12. Докажите, что значение выражения не зависит от значения переменной, входящей в него:

1) $1{,}6 - 7a^2 - (0{,}8 - 4a^2) + (3a^2 - 0{,}7)$;

2) $3x^2 - 9x - (8 - 5x^2 - (9x - 8x^2))$.

9.13. Докажите, что значение выражения $(2c^2 - 3c) + 1{,}8 - c^2 - (c^2 - 3c - 2{,}2)$ не зависит от значения переменной, входящей в него.

9.14. Какой многочлен надо прибавить к трёхчлену $2a^2 - 5a + 7$, чтобы сумма была равна:

1) 5; 2) 0; 3) a^2; 4) $-2a$?

9.15. Какой многочлен надо вычесть из двучлена $4a^3 - 8$, чтобы разность была равна:

1) -4; 2) 9; 3) $-2a^3$; 4) $3a$?

◆ ◆

9.16. Вместо звёздочки запишите такой многочлен, чтобы получилось тождество:

1) $* - (3x^2 - 4xy + 2y^2) = 9x^2 + y^2$;

2) $a^3 - 6a^2 + 2a - (*) = a^5 + 2a^2 - 7$.

9.17. Вместо звёздочки запишите такой многочлен, чтобы получилось тождество:

1) $(2x^2 - 14x + 9) + (*) = 20 - 10x$;

2) $(19a^2 - 17a^2b + b^3) - (*) = 20a^4 + 5a^2b$.

9.18. Вместо звёздочки запишите такой многочлен, чтобы после приведения подобных членов полученный многочлен не содержал переменной a:

1) $4a^2 - 3ab + b + 8 + *$; 2) $9a^3 - 9a + 7ab^2 + bc + bm + *$.

9.19. Вместо звёздочки запишите такой многочлен, чтобы после приведения подобных членов многочлен $3x^2 + 5x^2y + 7x - 8y + 15 + *$ не содержал:

1) членов с x^2;

2) членов с переменной x;

3) членов с переменной y.

9.20. Представьте в виде многочлена число, состоящее из:

1) 4 сотен, x десятков и y единиц;

2) a тысяч, b сотен, 5 десятков и c единиц.

9.21. Представьте в виде многочлена выражение:

1) $\overline{cba}$; 2) $\overline{abc} - \overline{ab}$; 3) $\overline{a0c} + \overline{ac}$.

9.22. Представьте в виде многочлена выражение:

1) $\overline{cab} + \overline{ca}$; 2) $\overline{abc} + \overline{bca}$; 3) $\overline{ab9} + \overline{7a}$.

9.23. Докажите, что значение выражения $(9 - 18n) - (6n - 7)$ кратно 8 при любом натуральном значении n.

9.24. Докажите, что значение выражения $(6m + 8) - (3m - 4)$ кратно 3 при любом натуральном значении m.

9.25. Докажите, что при любом натуральном значении n значение выражения $(5n + 9) - (5 - 2n)$ при делении на 7 даёт остаток, равный 4.

9.26. Чему равен остаток при делении на 9 значения выражения $(16n + 8) - (7n + 3)$, где n — произвольное натуральное число?

9.27. Представьте многочлен $3a^2b + 8a^3 - 6a + 12b - 9$ в виде суммы двух многочленов так, чтобы один из них не содержал переменной b.

9.28. Представьте многочлен $4mn^2 + 11m^4 - 7m^5 + 14mn - 9n + 3$ в виде разности двух многочленов с положительными коэффициентами.

9.29. Представьте многочлен $6x^2 - 3xy + 5x - 8y + 2$ в виде разности двух многочленов так, чтобы один из них не содержал переменной y.

9.30. Докажите, что значение разности двучленов $13m + 20n$ и $7m + 2n$, где m и n — произвольные натуральные числа, делится нацело на 6.

9.31. Докажите, что значение суммы двучленов $16a - 6b$ и $27b - 2a$, где a и b — произвольные натуральные числа, делится нацело на 7.

9.32. Представьте многочлен $x^2 - 6x + 14$ в виде разности:

1) двух двучленов; 2) трёхчлена и двучлена.

9.33. Представьте многочлен $3x^2 + 10x - 5$ в виде разности двучлена и трёхчлена.

9.34. Докажите, что выражение $(2x^4 + 4x - 1) - (x^4 + 8 + 9x) + (5x + x^2 - 3x^4)$ принимает отрицательное значение при любом значении x. Какое наибольшее значение принимает это выражение и при каком значении x?

9.35. Докажите, что выражение $(7y^2 - 9y + 8) - (3y^2 - 6y + 4) + 3y$ принимает положительное значение при любом значении y. Какое наименьшее значение принимает это выражение и при каком значении y?

9.36. Докажите, что:

1) сумма пяти последовательных натуральных чисел делится нацело на 5;

2) сумма трёх последовательных чётных натуральных чисел делится нацело на 6;

3) сумма четырёх последовательных нечётных натуральных чисел делится нацело на 8;

4) сумма четырёх последовательных натуральных чисел не делится нацело на 4;

5) остаток от деления на 6 суммы шести последовательных натуральных чисел равен 3.

9.37. Докажите, что:

1) сумма трёх последовательных натуральных чисел кратна 3;

2) сумма семи последовательных натуральных чисел делится нацело на 7;

3) сумма четырёх последовательных чётных натуральных чисел делится нацело на 4;

4) сумма пяти последовательных чётных натуральных чисел делится нацело на 10.

◆ ◆ ◆

9.38. Докажите, что:

1) сумма чисел $\overline{ab}$, $\overline{bc}$ и $\overline{ca}$ делится нацело на 11;

2) разность чисел $\overline{abc}$ и $\overline{cba}$ делится нацело на 99.

9.39. Докажите, что:

1) сумма чисел $\overline{abc}$, $\overline{bca}$ и $\overline{cab}$ кратна 111;

2) разность числа $\overline{abc}$ и суммы его цифр делится нацело на 9.

9.40. Докажите, что не существует таких значений x и y, при которых многочлены $5x^2 - 6xy - 7y^2$ и $-3x^2 + 6xy + 8y^2$ одновременно принимали бы отрицательные значения.

9.41. Докажите, что не существует таких значений x и y, при которых многочлены $-5x^2 + 3xy + 4y^2$ и $6x^2 - 3xy - y^2$ одновременно принимали бы отрицательные значения.

9.42. Расставьте скобки так, чтобы равенство стало тождеством:
1) $x^2 - 2x + 1 - x^2 - 2x - 1 = 2$;
2) $x^2 - 2x + 1 - x^2 - 2x - 1 = -2$;
3) $x^2 - 2x + 1 - x^2 - 2x - 1 = 0$.

9.43. Натуральные числа m и n таковы, что значение выражения $3m + 4n$ делится нацело на 171. Докажите, что значение выражения $177m + 179n$ также делится нацело на 171.

9.44. Целые числа a, b и c таковы, что значения выражений $a - b + 101$, $b - c + 101$, $c - a + 101$ являются тремя последовательными натуральными числами. Найдите эти натуральные числа.

Упражнения для повторения

9.45. Некоторое число сначала увеличили на 20 %, а потом уменьшили результат на 20 %. Установите, больше или меньше исходного полученное число и на сколько процентов.

9.46. Через первую трубу бассейн можно наполнить водой за 3 ч, а через вторую — за 6 ч. Сначала 2 ч была открыта первая труба, потом её закрыли, но открыли вторую. За сколько часов был наполнен бассейн?

9.47. Известно, что в парке $\frac{7}{24}$ деревьев составляют каштаны, а $\frac{5}{18}$ — берёзы. Сколько всего деревьев в парке, если их больше, чем 100, но меньше, чем 200?

9.48. Из села в направлении станции вышел пешеход со скоростью 4 км/ч. Через час из села со скоростью 10 км/ч выехал велосипедист, который прибыл на станцию на 0,5 ч раньше пешехода. Каково расстояние от села до станции?

§ 10 Умножение одночлена на многочлен

Умножим одночлен $2x$ на многочлен $3x + 2y - 5$. Для этого запишем произведение $2x(3x + 2y - 5)$. Раскроем скобки, применив распределительное свойство умножения. Имеем:

$$2x(3x + 2y - 5) = 2x \cdot 3x + 2x \cdot 2y - 2x \cdot 5 = 6x^2 + 4xy - 10x.$$

Полученный многочлен $6x^2 + 4xy - 10x$ является произведением одночлена $2x$ и многочлена $3x + 2y - 5$.

При умножении одночлена на многочлен всегда получается многочлен.

Чтобы умножить одночлен на многочлен, нужно умножить этот одночлен на каждый член многочлена и полученные произведения сложить.

Для произведения одночлена и многочлена справедливо переместительное свойство умножения. Поэтому приведённое правило позволяет умножать многочлен на одночлен.

Пример 1. Упростите выражение $6x(x - 1) - 3(2x^2 - 3x + 4)$.
Решение. Имеем:
$6x(x - 1) - 3(2x^2 - 3x + 4) = \underline{6x^2} - \underline{\underline{6x}} - \underline{6x^2} + \underline{\underline{9x}} - 12 = 3x - 12.$ ■

Пример 2. Решите уравнение $0,5x(3 + 4x) = 2x(x - 2) - 11$.
Решение. Имеем:
$$1,5x + 2x^2 = 2x^2 - 4x - 11;$$
$$1,5x + 2x^2 - 2x^2 + 4x = -11;$$
$$5,5x = -11;$$
$$x = -2.$$
Ответ: –2. ■

Пример 3. Решите уравнение $\frac{5x + 4}{12} - \frac{x + 3}{8} = 2$.

Решение. Умножив обе части данного уравнения на число 24, являющееся наименьшим общим знаменателем дробей, содержащихся в этом уравнении, получаем:
$$\left(\frac{5x + 4}{12} - \frac{x + 3}{8}\right) \cdot 24 = 2 \cdot 24.$$
Отсюда $24 \cdot \frac{5x + 4}{12} - 24 \cdot \frac{x + 3}{8} = 48;$
$$2(5x + 4) - 3(x + 3) = 48;$$
$$10x + 8 - 3x - 9 = 48;$$
$$7x - 1 = 48;$$
$$x = 7.$$
Ответ: 7. ■

Пример 4. Докажите, что при любом значении переменной a значение выражения $3a(a^2 - 4) - 2a^2(1,5a + 4a^4) + 6(2a - 1)$ является отрицательным числом.

Решение. $3a(a^2 - 4) - 2a^2(1{,}5a + 4a^4) + 6(2a - 1) = 3a^3 - 12a - 3a^3 - 8a^6 + 12a - 6 = -8a^6 - 6$.

Выражение $-8a^6$ при любом значении a принимает неположительное значение. Следовательно, значение выражения $-8a^6 - 6$ является отрицательным числом при любом значении a. ■

Пример 5. Остаток при делении натурального числа m на 6 равен 5, а остаток при делении натурального числа n на 4 равен 2. Докажите, что значение выражения $2m + 3n$ делится нацело на 4 и не делится нацело на 12.

Решение. Пусть неполное частное при делении m на 6 равно a, а при делении n на 4 равно b. Тогда $m = 6a + 5$, $n = 4b + 2$.

Следовательно,

$2m + 3n = 2(6a + 5) + 3(4b + 2) = 12a + 10 + 12b + 6 = 12a + 12b + 16$.

Каждое слагаемое полученной суммы делится нацело на 4, поэтому и сумма делится нацело на 4.

Первые два слагаемых делятся нацело на 12, а третье — не делится. Поэтому и сумма не делится нацело на 12. ■

? Как умножить одночлен на многочлен?

Упражнения

10.1. Преобразуйте в многочлен произведение:

1) $3x(2x + 5)$;
2) $4x(x^2 - 8x - 2)$;
3) $-2a(a^2 + a - 3)$;
4) $5b^2(3b^2 - 7b + 10)$;
5) $mn(m^2n - n^3)$;
6) $2ab(a^3 - 3a^2b + b^2)$;
7) $(4y^3 - 6y + 7) \cdot (-1{,}2y^3)$;
8) $0{,}4x^2y(3xy^2 - 5xy + 13x^2y^3)$;
9) $(2{,}3a^3b - 1{,}7b^4 - 3{,}5b) \cdot (-10a^2b)$;
10) $-4pk^3(3p^2k - p + 4k - 2)$;
11) $\frac{2}{3}mn^2(6m - 1{,}8n + 9)$;
12) $1\frac{1}{7}cd\left(\frac{7}{8}c^5 - \frac{7}{24}c^2d^7 - \frac{1}{4}d^{10}\right)$.

10.2. Выполните умножение:

1) $3x(4x^2 - x)$;
2) $-5a^2(a^2 - 6a - 3)$;
3) $(8b^2 - 10b + 2) \cdot 0{,}5b$;
4) $x^3(x^5 - x^2 + 7x - 1)$;
5) $-2c^2d^4(4c^2 - c^3d + 5d^4)$;
6) $(5m^3n - 8mn^2 - 2n^6) \cdot (-4m^2n^8)$.

10.3. Упростите выражение:

1) $8x - 2x(3x + 4)$;
2) $7a^2 + 3a(9 - 5a)$;
3) $6x(4x - 7) - 12(2x^2 + 1)$;
4) $2m(m - 3n) + m(5m + 11n)$;

5) $c(c^2-1)+c^2(c-1)$;
6) $8x(x^2+y^2)-9x(x^2-y^2)$;
7) $5b^3(2b-3)-2{,}5b^3(4b-6)$;
8) $x(5x^2+6x+8)-4x(2+2x+x^2)$.

10.4. Упростите выражение:
1) $7x(x-4)-x(6-x)$;
2) $5ab(4a+3b)-10a^2(2b-4)$;
3) $xy(2x-11y)-x(xy+14y^2)$;
4) $5c^3(4c-3)-2c^2(8c^2-12)$.

10.5. Упростите выражение и найдите его значение:
1) $3x(2x-5)-8x(4x-3)$, если $x=-1$;
2) $2x(14x^2-x+5)+4x(2{,}5+3x-7x^2)$, если $x=7$;
3) $8ab(a^2-2b^2)-7a(a^2b-3b^3)$, если $a=-3$, $b=2$.

10.6. Упростите выражение и найдите его значение:
1) $6x(6x-4)+9x(3-4x)$, если $x=-\frac{1}{9}$;
2) $2m(m-n)-n(3m-n)-n(n+6)$, если $m=-4$, $n=0{,}5$.

10.7. Решите уравнение:
1) $5x(3x-2)-15x(4+x)=140$;
2) $1{,}2x(4+5x)=3x(2x+1)-9$;
3) $6x(7x-8)-2x(21x-6)=3-30x$;
4) $12x-3x(6x-9)=9x(4-2x)+3x$;
5) $7x^2-x(7x-5)-2(2{,}5x+1)-3=0$;
6) $8(x^2-4)-4x(3{,}5x-7)=20x-6x^2$.

10.8. Найдите корень уравнения:
1) $0{,}4x(5x-6)+7{,}2=2x(x+0{,}6)$;
2) $x(3x+2)-9(x^2-7x)=6x(10-x)$;
3) $12(x^3-2)-7x(x^2-1)=5x^3+2x+6$.

10.9. Докажите тождество:
1) $ab(b-c)+ac(c-b)-a(b^2-3bc+c^2)=abc$;
2) $4a(a+b)-a(3a-4b)-8ab=a^2$;
3) $a(a+2b)+b(a+b)=b(2a+b)+a(a+b)$;
4) $a(b+c-bc)-b(a+c-ac)=(a-b)c$.

10.10. Докажите тождество:
1) $a(a+b)-b(a-b)=a^2+b^2$;
2) $b(a-b)+b(b+c)=b(a+b)-b(b-c)$.

10.11. Докажите, что если:
1) $a+b+c=0$, то $a(bc-1)+b(ac-1)+c(ab-1)=3abc$;
2) $a^2+b^2=c^2$, то $c(ab-c)-b(ac-b)-a(bc-a)+abc=0$.

10.12. Докажите, что значение выражения
$x(12x+11)-x^2(x^2+8)-x(11+4x-x^3)$
не зависит от значения переменной.

10.13. Докажите, что значение выражения

$$6x(x-3)-9\left(\frac{2}{3}x^2-2x+7\right)$$

не зависит от значения переменной.

10.14. Докажите, что при любых значениях x значение выражения $4(x^2 - 2x + 4) - 0{,}5x(6x - 16)$ является положительным числом.

10.15. Докажите, что выражение $3x^2(3 - 4x) - 6x(1{,}5x - 2x^2 + x^3)$ принимает неположительные значения при всех значениях x.

10.16. Докажите, что выражение $7a^4(a + 3) - a^3(21a + 7a^2 - 3a^5)$ принимает неотрицательные значения при всех значениях a.

10.17. Замените звёздочки такими одночленами, чтобы получилось тождество:

1) $* \cdot (a - b + c) = -abc + b^2c - bc^2$;
2) $* \cdot (ab - b^2) = a^3b - a^2b^2$;
3) $-3a^2(* - *) = 6a^3 + 15a^4$.

10.18. Замените звёздочки такими одночленами, чтобы получилось тождество:

1) $(x - y) \cdot * = x^2y^2 - x^3y$;
2) $(-9x^2 + *) \cdot y = * + y^4$;
3) $(1{,}4x - *) \cdot 3x = * - 0{,}6x^3$;
4) $*(* - x^2y^5 + 5y^6) = 8x^3y^3 + 5x^3y^8 - *$.

10.19. Упростите выражение:

1) $15a \cdot \frac{a+4}{3} + 12a^2 \cdot \frac{5-2a}{6}$;

2) $24c^3 \cdot \frac{c^2+2c-3}{8} - 18c^2 \cdot \frac{c^3-c^2+2}{9}$;

3) $34x \cdot \frac{x-y}{17} - 45y \cdot \frac{x-2y}{15} - y(6y - 5x)$.

10.20. Упростите выражение:

1) $6b^2 \cdot \frac{5b^2-4}{3} + 20b \cdot \frac{3b-2b^3}{4}$;

2) $14m \cdot \frac{m+n}{7} - \frac{m-n}{8} \cdot 16n - 2(m^2 + n^2)$.

10.21. При каком значении переменной значение выражения $8y(y - 7)$ на 15 больше значения выражения $2y(4y - 10{,}5)$?

10.22. Длина прямоугольника в 3 раза больше его ширины. Если ширину прямоугольника уменьшить на 6 см, то его площадь уменьшится на 144 см^2. Найдите исходную ширину прямоугольника.

10.23. Ширина прямоугольника на 8 см меньше его длины. Если длину прямоугольника увеличить на 6 см, то его площадь увеличится на 72 см^2. Найдите периметр данного прямоугольника.

10.24. За 3 дня турист прошёл 108 км. За второй день он прошёл на 6 км больше, чем за первый, а за третий — $\frac{5}{13}$ расстояния, пройденного за первых два дня. Сколько километров турист прошёл за каждый из этих дней?

10.25. Три бригады рабочих изготовили за смену 80 деталей. Первая бригада изготовила на 12 деталей меньше, чем вторая, а третья — $\frac{3}{7}$ количества деталей, изготовленных первой и второй бригадами вместе. Сколько деталей изготовила каждая бригада?

10.26. Упростите выражение:

1) $x^{n+1}(x^{n+6} - 1) - x^{n+2}(x^{n+5} - x^3)$;

2) $x^{n+2}(x^2 - 3) - x^n(x^{n+2} - 3x^2 - 1)$,

где n — натуральное число.

10.27. Упростите выражение:

1) $x^n(x^{n+4} + 2x) + x(3x^n - x^{2n+3})$;

2) $x(4x^{n+1} + 2x^{n+4} - 7) + x^{n+2}(4 + 2x^3 - x^n)$,

где n — натуральное число.

10.28. Остаток при делении натурального числа a на 3 равен 1, а остаток при делении натурального числа b на 9 равен 7. Докажите, что значение выражения $4a + 2b$ делится нацело на 3.

10.29. Остаток при делении натурального числа m на 5 равен 3, а остаток при делении натурального числа n на 3 равен 2. Докажите, что значение выражения $3m + 5n$ не делится нацело на 15.

10.30. Существуют ли такие попарно различные числа a, b и c, что $a(b - c) = b(c - a) = c(a - b)$?

Упражнения для повторения

10.31. Общая площадь трёх полей равна 46,4 га. Площадь второго поля в $1\frac{2}{3}$ раза меньше площади первого, а площадь третьего поля составляет 72 % площади первого. Найдите площадь каждого поля.

10.32. За первый день Саша прочитал $\frac{2}{7}$ страниц книги, за второй — 64 % оставшихся, а за третий — остальные 54 страницы. Сколько страниц в книге?

10.33. Какова вероятность того, что при бросании игрального кубика выпадет:

1) нечётное число;

2) число, которое делится нацело на 3;

3) число, которое не делится нацело на 3?

10.34. Велосипедист проехал первую половину пути за 3 ч, а вторую — за 2,5 ч, так как увеличил скорость на 3 км/ч. Какое расстояние проехал велосипедист?

10.35. На одном складе было 184 т минеральных удобрений, а на втором — 240 т. Первый склад отпускает ежедневно по 15 т удобрений, а второй — по 18 т. Через сколько дней количество удобрений, оставшихся на первом складе, будет составлять $\frac{2}{3}$ количества удобрений, оставшихся на втором складе?

§ 11 Умножение многочлена на многочлен

Покажем, как умножить многочлен на многочлен, на примере произведения $(a + b)(x - y - z)$. Обозначим второй множитель буквой c. Тогда получаем:

$$(a + b)(x - y - z) = (a + b)c = ac + bc.$$

Теперь в выражении $ac + bc$ подставим вместо c многочлен $x - y - z$. Запишем:

$$ac + bc = a(x - y - z) + b(x - y - z) = ax - ay - az + bx - by - bz.$$

Полученный многочлен и является искомым произведением.

Этот же результат можно получить, если произведение находить по схеме:

$$(a + b)\,(x - y - z).$$

Сформулируем правило умножения многочлена на многочлен.

Чтобы умножить многочлен на многочлен, можно каждый член одного многочлена умножить на каждый член другого и полученные произведения сложить.

Таким образом, при умножении многочлена на многочлен всегда получаем многочлен.

Пример 1. Упростите выражение $(3x - 4)(2x + 3) - (x - 2)(x + 5)$.

Решение.

$$(3x - 4)(2x + 3) - (x - 2)(x + 5) =$$
$$= 6x^2 + 9x - 8x - 12 - (x^2 + 5x - 2x - 10) =$$
$$= \underline{6x^2} + \underline{\underline{\underline{9x}}} - \underline{\underline{\underline{8x}}} - 12 - \underline{x^2} - \underline{\underline{\underline{5x}}} + \underline{\underline{\underline{2x}}} + 10 = 5x^2 - 2x - 2. \blacksquare$$

Пример 2. Представьте в виде многочлена выражение

$$(a + 2)(a - 5)(a + 3).$$

Решение. $(a + 2)(a - 5)(a + 3) = (a^2 - 5a + 2a - 10)(a + 3) =$
$= (a^2 - 3a - 10)(a + 3) = a^3 + \underline{3a^2} - \underline{3a^2} - \underline{\underline{9a}} - \underline{\underline{\underline{10a}}} - 30 = a^3 - 19a - 30.$ ■

Пример 3. Найдите четыре последовательных натуральных числа таких, что произведение третьего и четвёртого из них на 38 больше произведения первого и второго.

Решение. Пусть меньшее из этих чисел равно x, тогда три следующих за ним числа будут равны $x + 1$, $x + 2$, $x + 3$. Так как по условию произведение $(x + 2)(x + 3)$ на 38 больше, чем произведение $x(x + 1)$, то:

$$(x + 2)(x + 3) - x(x + 1) = 38.$$

Отсюда $x^2 + 2x + 3x + 6 - x^2 - x = 38;$

$$4x = 38 - 6;$$
$$x = 8.$$

Следовательно, искомыми числами являются 8, 9, 10 и 11.

Ответ: 8, 9, 10 и 11. ■

Пример 4. Докажите, что значение выражения

$$(n + 39)(n - 4) - (n + 31)(n - 3)$$

кратно 7 при всех натуральных значениях n.

Решение. Выполним преобразование:

$$(n + 39)(n - 4) - (n + 31)(n - 3) =$$
$$= n^2 - 4n + 39n - 156 - (n^2 - 3n + 31n - 93) =$$
$$= \underline{n^2} - \underline{\underline{4n}} + \underline{\underline{\underline{39n}}} - 156 - \underline{n^2} + \underline{\underline{3n}} - \underline{\underline{\underline{31n}}} + 93 = 7n - 63 = 7(n - 9).$$

Данное выражение представлено в виде произведения двух множителей, первый из которых равен 7, а второй принимает только целые значения. Следовательно, при любом натуральном n значение данного выражения нацело делится на 7. ■

? Как умножить многочлен на многочлен?

Упражнения

11.1. Выполните умножение:

1) $(a-2)(b+5)$;
2) $(m+n)(p-k)$;
3) $(x-8)(x+4)$;
4) $(x-10)(x-9)$;
5) $(c+5)(c+8)$;
6) $(3y+1)(4y-6)$;
7) $(-2m-3)(5-m)$;
8) $(5x^2-x)(6x^2+4x)$;
9) $(-c-4)(c^3+3)$;
10) $(x-5)(x^2+4x-3)$;
11) $(2a+3)(4a^2-4a+3)$;
12) $a(5a-4)(3a-2)$.

11.2. Преобразуйте в многочлен выражение:

1) $(a+b)(c-d)$;
2) $(x-6)(x-4)$;
3) $(a-3)(a+7)$;
4) $(11-c)(c+8)$;
5) $(d+13)(2d-1)$;
6) $(3y-5)(2y-12)$;
7) $(2x^2-3)(x^2+4)$;
8) $(x-6)(x^2-2x+9)$;
9) $(5x-y)(2x^2+xy-3y^2)$;
10) $b(6b+7)(3b-4)$.

11.3. Упростите выражение:

1) $(x+2)(x+11)-2x(3-4x)$;
2) $(a+5)(a-2)+(a-4)(a+6)$;
3) $(y-9)(3y-1)-(2y+1)(5y-7)$;
4) $(4x-1)(4x-3)-(2x-10)(8x+1)$.

11.4. Упростите выражение:

1) $(a-2)(a-1)-a(a+1)$;
2) $(b-5)(b+10)+(b+6)(b-8)$;
3) $(2c+3)(3c+2)-(2c+7)(2c-7)$;
4) $(3d+5)(5d-1)-(6d-3)(2-8d)$.

11.5. Упростите выражение и найдите его значение:

1) $(x+2)(x-5)-(x-3)(x+4)$, если $x=-5{,}5$;
2) $(y+9)(y-2)+(3-y)(6+5y)$, если $y=-1\frac{1}{2}$.

11.6. Упростите выражение и найдите его значение:

1) $(a+3)(a-10)-(a+7)(a-4)$, если $a=-0{,}01$;
2) $(8c+12)(3c-1)+(3c+2)(-5c-6)$, если $c=1\frac{1}{3}$.

11.7. Решите уравнение:

1) $(2x-3)(4x+3)-8x^2=33$;
2) $(2x-6)(8x+5)+(3-4x)(3+4x)=55$;
3) $21x^2-(3x-7)(7x-3)=37$;
4) $(x+1)(x+2)-(x-3)(x+4)=12$;
5) $(-4x+1)(x-1)-x=(5-2x)(2x+3)-17$.

11.8. Решите уравнение:

1) $(2x - 1)(15 + 9x) - 6x(3x - 5) = 87$;

2) $(14x - 1)(2 + x) = (2x - 8)(7x + 1)$;

3) $(x + 10)(x - 5) - (x - 6)(x + 3) = 16$;

4) $(3x + 7)(8x + 1) = (6x - 7)(4x - 1) + 93x$.

11.9. Выполните умножение:

1) $(x + 2)(x - 1)(x - 4)$;

2) $(2x + 1)(x + 5)(x - 6)$;

3) $(x^2 - 2x + 3)(x^2 + 2x - 3)$;

4) $(a + 2b - c)(a - 3b + 2c)$;

5) $(a + b)(a^3 - a^2b + ab^2 - b^3)$;

6) $(x - 1)(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)$.

11.10. Преобразуйте в многочлен выражение:

1) $(a + 1)(a - 2)(a - 3)$;

2) $(3a - 2)(a + 3)(a - 7)$;

3) $(a^2 - 2a + 1)(a^2 + 3a - 2)$;

4) $(a + 1)(a^4 - a^3 + a^2 - a + 1)$.

11.11. Замените степень произведением, а затем произведение преобразуйте в многочлен:

1) $(a + 5)^2$; 2) $(4 - 3b)^2$; 3) $(a + b + c)^2$; 4) $(a - b)^3$.

11.12. Докажите, что при любом значении переменной значение выражения $(x + 3)(x^2 - 4x + 7) - (x^2 - 5)(x - 1)$ равно 16.

11.13. Докажите, что при любом значении переменной значение выражения $(x - 3)(x^2 + 7) - (x - 2)(x^2 - x + 5)$ равно -11.

11.14. Задумали четыре натуральных числа. Второе число на 1 больше первого, третье — на 5 больше второго, а четвёртое — на 2 больше третьего. Найдите эти числа, если отношение первого числа к третьему равно отношению второго числа к четвёртому.

11.15. Задумали три натуральных числа. Второе число на 4 больше первого, а третье — на 6 больше второго. Найдите эти числа, если отношение первого числа ко второму равно отношению второго числа к третьему.

11.16. Найдите четыре последовательных натуральных числа таких, что произведение четвёртого и второго из этих чисел на 17 больше произведения третьего и первого.

11.17. Найдите три последовательных натуральных числа таких, что произведение второго и третьего из этих чисел на 50 больше квадрата первого.

11.18. Сторона квадрата на 3 см меньше одной из сторон прямоугольника и на 5 см больше его другой стороны. Найдите сторону квадрата, если его площадь на 45 см^2 больше площади данного прямоугольника.

11.19. Периметр прямоугольника равен 60 см. Если одну его сторону уменьшить на 5 см, а другую увеличить на 3 см, то его площадь уменьшится на 21 см^2. Найдите стороны прямоугольника.

11.20. Длина прямоугольника на 2 см больше его ширины. Если длину увеличить на 2 см, а ширину уменьшить на 4 см, то площадь прямоугольника уменьшится на 40 см^2. Найдите исходные длину и ширину прямоугольника.

11.21. Докажите тождество:

1) $x^2 - 8x + 7 = (x - 1)(x - 7)$;
2) $y^2(y - 7)(y + 2) = y^4 - 5y^3 - 14y^2$;
3) $a^3 - 8 = (a - 2)(a^2 + 2a + 4)$;
4) $(a - 1)(a + 1)(a^2 + 1) = a^4 - 1$;
5) $(a^4 - a^2 + 1)(a^4 + a^2 + 1) = a^8 + a^4 + 1$.

11.22. Докажите тождество:

1) $3a^2 + 10a + 3 = 3(a + 3)\left(a + \dfrac{1}{3}\right)$;
2) $(a + 1)(a^2 + 5a + 6) = (a^2 + 3a + 2)(a + 3)$;
3) $(a + 1)(a^4 - a^3 + a^2 - a + 1) = a^5 + 1$.

11.23. При всех ли натуральных значениях n значение выражения $(n + 9)(n + 11) - (n + 3)(n + 5)$ кратно 12?

11.24. При всех ли натуральных значениях n значение выражения $(n + 29)(n + 3) - (n + 7)(n + 1)$ кратно 8?

11.25. Замените звёздочки такими одночленами, чтобы получилось тождество:

1) $(a - 2)(* + 6) = a^2 + * - *$; 2) $(2a + 7)(a - *) = * + * - 14$.

11.26. Замените звёздочки такими одночленами, чтобы получилось тождество:

1) $(x + 3)(* + 5) = 3x^2 + * + *$; 2) $(x - 4)(x + *) = * + * + 24$.

11.27. Выбрали некоторые четыре последовательных натуральных числа. Зависит ли разность произведения второго и третьего из этих чисел и произведения первого и четвёртого от выбора чисел?

11.28. Выбрали некоторые три последовательных натуральных числа. Зависит ли разность квадрата второго из этих чисел и произведения первого и третьего от выбора чисел?

11.29. Докажите, что значение выражения $\overline{ab} \cdot \overline{ba} - ab$ делится нацело на 10 независимо от значений a и b.

11.30. Остаток при делении натурального числа x на 6 равен 3, а остаток при делении натурального числа y на 6 равен 2. Докажите, что произведение чисел x и y делится нацело на 6.

11.31. Остаток при делении натурального числа a на 8 равен 3, а остаток при делении натурального числа b на 8 равен 7. Докажите, что остаток при делении произведения чисел a и b на 8 равен 5.

11.32. Остаток при делении натурального числа m на 11 равен 9, а остаток при делении натурального числа n на 11 равен 5. Докажите, что остаток при делении произведения чисел m и n на 11 равен 1.

11.33. Докажите, что если $ab + bc + ac = 0$, то
$(a - b)(a - c) + (b - c)(b - a) + (c - a)(c - b) = a^2 + b^2 + c^2$.

11.34. Докажите тождество:
$(a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ac) = a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$.

11.35. На доске записаны два двучлена $x^2 + 2$ и $x + 1$. Разрешается записывать сумму, разность или произведение любых двух записанных многочленов. Можно ли с помощью таких операций получить многочлен $x^3 + 2$?

11.36. Выражение $(4x^{15} + 3x - 6)^{15}$ представили в виде многочлена стандартного вида. Найдите сумму коэффициентов этого многочлена.

Упражнения для повторения

11.37. Двое рабочих изготовили вместе 108 деталей. Первый рабочий работал 5 ч, а второй — 3 ч. Сколько деталей изготавливал ежечасно каждый рабочий, если вместе за 1 ч они изготавливают 26 деталей?

11.38. Смешали 72 г 5%-го раствора соли и 48 г 15%-го раствора соли. Найдите процентное содержание соли в полученном растворе.

11.39. Решите уравнение:

1) $\overline{1x} + \overline{2x} = \overline{x6}$;   2) $\overline{x4} + \overline{x8} = \overline{1x2}$.

11.40. Докажите тождество:

1) $18^{16n} = 12^{8n} \cdot 9^{12n}$;   2) $75^{8n} = 225^{4n} \cdot 625^{2n}$,

где n — натуральное число.

11.41. (*Старинная греческая задача.*) Демохар[1] четвёртую часть жизни прожил мальчиком, пятую часть — юношей, третью часть — зрелым мужчиной и 13 лет — в годах. Сколько лет прожил Демохар?

§ 12 Разложение многочленов на множители. Вынесение общего множителя за скобки

Умножим многочлен $2x - 1$ на многочлен $x + 1$. Имеем:

$$(2x - 1)(x + 1) = 2x^2 + 2x - x - 1 = 2x^2 + x - 1.$$

[1] Демохар (IV–III вв. до н. э.) — древнегреческий политик, оратор и историк.

Получили тождество $(2x - 1)(x + 1) = 2x^2 + x - 1$, которое можно записать и так: $2x^2 + x - 1 = (2x - 1)(x + 1)$.

О такой записи говорят, что многочлен $2x^2 + x - 1$ **разложили на множители** $2x - 1$ и $x + 1$.

Вообще, представление многочлена в виде произведения нескольких многочленов называют **разложением многочлена на множители**.

Разложение многочлена на множители является ключом к решению многих задач. Например, каждое из уравнений $2x - 1 = 0$ и $x + 1 = 0$ решить очень легко, а вот уравнение $2x^2 + x - 1 = 0$ вы пока решать не умеете. Однако если воспользоваться разложением многочлена $2x^2 + x - 1$ на множители, то уравнение $2x^2 + x - 1 = 0$ можно записать так:

$$(2x - 1)(x + 1) = 0.$$

Отсюда $2x - 1 = 0$ или $x + 1 = 0$. Искомыми корнями уравнения являются числа 0,5 и –1.

Таким образом, разложение многочлена на множители позволило свести решение сложного уравнения к решению двух более простых.

Существует немало приёмов разложения многочлена на множители. Самый простой из них — **вынесение общего множителя за скобки**.

Это преобразование вам уже знакомо. Например, в 6 классе значение выражения $1{,}62 \cdot 1{,}08 - 0{,}08 \cdot 1{,}62$ находили так:

$$1{,}62 \cdot 1{,}08 - 0{,}08 \cdot 1{,}62 = 1{,}62(1{,}08 - 0{,}08) = 1{,}62.$$

Здесь использовано распределительное свойство умножения относительно сложения $c(a + b) = ac + bc$, записанное справа налево: $ac + bc = c(a + b)$.

Воспользуемся этой идеей для решения следующих примеров.

Пример 1. Разложите на множители:

1) $8a^2b^2 - 12ab^3$; 2) $10a^8 - 5a^5$.

Решение. 1) Если коэффициенты многочлена — целые числа, то за скобки обычно выносят наибольший общий делитель модулей этих коэффициентов (в нашем примере это число 4). Одночлены a^2b^2 и ab^3 содержат такие общие множители: a, b, ab, b^2 и ab^2. Любой из этих множителей можно вынести за скобки. Но обычно общий множитель выбирают так, чтобы члены многочлена, остающегося в скобках, не имели общего буквенного множителя. Такие соображения подсказывают вынести за скобки общий множитель ab^2:

$$8a^2b^2 - 12ab^3 = 4ab^2(2a - 3b).$$

2) $10a^8 - 5a^5 = 5a^5(2a^3 - 1)$. ■

Чтобы проверить, верно ли разложили многочлен на множители, надо перемножить полученные множители.

Пример 2. Представьте в виде произведения многочленов выражение:

1) $a(m-3)+b(m-3)$; 3) $6x(x-7)-(x-7)^2$.

2) $x(c-d)+y(d-c)$;

Решение. 1) В данном случае общим множителем является многочлен $m-3$:

$$a(m-3)+b(m-3)=(m-3)(a+b).$$

2) $x(c-d)+y(d-c)=x(c-d)+y\cdot(-1)\cdot(c-d)=x(c-d)-y(c-d)=$ $=(c-d)(x-y)$.

3) $6x(x-7)-(x-7)^2=(x-7)(6x-(x-7))=(x-7)(6x-x+7)=$ $=(x-7)(5x+7)$. ■

Пример 3. Вынесите за скобки общий множитель в выражении $(12x-18y)^2$.

Решение. $(12x-18y)^2=(6(2x-3y))^2=6^2(2x-3y)^2=36(2x-3y)^2$. ■

Пример 4. Решите уравнение:

1) $4x^2-12x=0$; 2) $(3x-7)(x+4)+(x-1)(x+4)=0$.

Решение. 1) Разложив левую часть уравнения на множители и применив условие, согласно которому произведение равно нулю, получаем:

$$4x(x-3)=0;$$
$$4x=0 \text{ или } x-3=0;$$
$$x=0 \text{ или } x=3.$$

2) $(3x-7)(x+4)+(x-1)(x+4)=0$;

$$(x+4)(3x-7+x-1)=0;$$
$$x+4=0 \text{ или } 4x-8=0;$$
$$x=-4 \quad \text{ или } x=2.$$

Ответ: 1) 0; 3; 2) –4; 2. ■

Пример 5. Докажите, что значение выражения: 1) 8^7-4^9 делится нацело на 14; 2) 20^3-4^4 делится нацело на 121.

Решение. 1) Представим выражения 8^7 и 4^9 в виде степеней с основанием 2 и вынесем за скобки общий множитель. Получим:

$8^7-4^9=(2^3)^7-(2^2)^9=2^{21}-2^{18}=2^{18}(2^3-1)=2^{18}\cdot(8-1)=2^{18}\cdot 7=$ $=2^{17}\cdot 2\cdot 7=2^{17}\cdot 14$.

Данное выражение равно произведению двух натуральных чисел, одним из которых является 14. Отсюда следует, что значение выражения 8^7-4^9 делится нацело на 14.

2) Имеем: $20^3-4^4=(5\cdot 4)^3-4^4=5^3\cdot 4^3-4^4=4^3(5^3-4)=4^3(125-$ $-4)=4^3\cdot 121$.

Следовательно, значение данного выражения делится нацело на 121. ■

Пример 6. При каком значении a уравнение $(x + 2)(x + a) - x(x + 1) = 3a + 1$ имеет бесконечно много корней?

Решение.

$$x^2 + ax + 2x + 2a - x^2 - x = 3a + 1;$$
$$ax + x + 2a = 3a + 1;$$
$$ax + x = a + 1;$$
$$(a + 1)x = a + 1.$$

При $a = -1$ последнее уравнение принимает вид $0x = 0$ и имеет бесконечно много корней.

Заметим, что если $a \neq -1$, то уравнение имеет единственный корень $x = (a + 1) : (a + 1)$, равный 1.

Ответ: при $a = -1$. ■

? **1.** Поясните, что называют разложением многочлена на множители.

2. Какое свойство умножения используют при вынесении общего множителя за скобки?

Упражнения

12.1. Вынесите за скобки общий множитель:

1) $am + an$;
2) $6x - 6y$;
3) $4b + 16c$;
4) $12x - 15y$;
5) $-cx - cy$;
6) $4bk + 4bt$;
7) $-8a - 18b$;
8) $ax + a$;
9) $7c - 7$;
10) $24x + 30y$;
11) $10mx - 15my$;
12) $x^2 + xy$;
13) $3d^2 - 3cd$;
14) $4a^2 + 16ab$;
15) $a^6 - a^3$;
16) $b^2 + b^8$;
17) $7p^3 - 5p$;
18) $15c^2d - 3cd$;
19) $14x^2y + 21xy^2$;
20) $-2x^9 + 16x^6$;
21) $8a^4b^2 - 36a^3b^7$.

12.2. Разложите на множители:

1) $3a + 6b$;
2) $12m - 16n$;
3) $10ck - 15cp$;
4) $8ax + 8a$;
5) $5b - 25bc$;
6) $14x^2 + 7x$;
7) $n^{10} - n^5$;
8) $m^6 + m^7$;
9) $9x - 27x^4$;
10) $18y^5 + 12y^4$;
11) $56a^{10}b^6 - 32a^4b^8$;
12) $36mn^5 + 63m^2n^6$.

12.3. Вычислите, используя вынесение общего множителя за скобки:

1) $173^2 + 173 \cdot 27$;
2) $214 \cdot 314 - 214^2$;
3) $0,4^3 + 0,4^2 \cdot 0,6$.

12.4. Найдите значение выражения:

1) $516^2 - 516 \cdot 513$;
2) $0,7^3 + 0,7 \cdot 0,51$;
3) $0,2^4 - 0,2^3 \cdot 1,2$.

12.5. Вычислите значение выражения, предварительно разложив его на множители:

1) $6,32x - x^2$, если $x = 4,32$;
2) $a^3 + a^2b$, если $a = 1,5$, $b = -2,5$;
3) $m^3p - m^2n^2$, если $m = 3$, $p = \frac{1}{3}$, $n = -3$.

12.6. Найдите значение выражения:

1) $0{,}74x^2 + 26x$, если $x = 100$;

2) $x^2y^3 - x^3y^2$, если $x = 4$, $y = 5$.

12.7. Решите уравнение:

1) $y^2 - 6y = 0$;

2) $x^2 + x = 0$;

3) $4m^2 - 20m = 0$;

4) $13x^2 + x = 0$;

5) $9x^2 - 6x = 0$;

6) $12x - 0{,}3x^2 = 0$.

12.8. Решите уравнение:

1) $x^2 - x = 0$;

2) $p^2 + 15p = 0$;

3) $5x^2 - 30x = 0$;

4) $14x^2 + 18x = 0$.

12.9. Разложите на множители:

1) $2x(a + b) + y(a + b)$;

2) $(a - 4) - b(a - 4)$;

3) $5a(m - n) + 7b(m - n)$;

4) $6x(4x + 1) - 11(4x + 1)$;

5) $a(c - d) + b(d - c)$;

6) $x(x - 6) - 10(6 - x)$;

7) $b(b - 20) + (20 - b)$;

8) $6a(a - 3b) - 13b(3b - a)$;

9) $(m - 9)^2 - 3(m - 9)$;

10) $a(a + 5)^2 + (a + 5)$;

11) $(m^2 - 3) - n(m^2 - 3)^2$;

12) $8c(p - 12) + 7d(p - 12)^2$.

12.10. Представьте выражение в виде произведения многочленов:

1) $c(x - 3) - d(x - 3)$;

2) $m(p - k) - (p - k)$;

3) $m(x - y) - n(y - x)$;

4) $x(2 - x) + 4(x - 2)$;

5) $4x(2x - y) - 5y(y - 2x)$;

6) $(y + 1)^2 - 4y(y + 1)$;

7) $10(a^2 - 5) + (a^2 - 5)^2$;

8) $(a - 2)^2 - 6(a - 2)$.

12.11. Разложите на множители:

1) $2a^5b^2 - 4a^3b + 6a^2b^3$;

2) $mn^3 + 5m^2n^2 - 7m^2n$;

3) $xy^2 + x^2y - xy$;

4) $9x^3 + 4x^2 - x$;

5) $-6m^4 - 8m^5 - 2m^6$;

6) $42a^4b - 28a^3b^2 - 70a^5b^3$.

12.12. Вынесите за скобки общий множитель:

1) $m^2n + mn + n$;

2) $3x^6 + 6x^5 - 15x^4$;

3) $7a^4b^3 - 14a^3b^4 + 21a^2b^5$;

4) $20b^6c^5 - 45b^5c^6 - 30b^5c^5$.

12.13. Найдите и исправьте ошибки в равенствах:

1) $4a + 4 = 4(a + 4)$;

2) $6ab - 3b = b(6a - 2b)$;

3) $-5x - 10y = -5(x - 2y)$;

4) $x^6 - x^4 + x^2 = x^2(x^3 - x^2 + x)$.

12.14. Докажите, что сумма любого натурального числа и его квадрата является чётным числом.

12.15. Разложите на множители:

1) $a(2a + b)(a + b) - 4a(a + b)^2$;

2) $3m^2(m - 8) + 6m(m - 8)^2$;

3) $(2a + 3)(a + 5) + (a - 1)(a + 5)$;

4) $(3x + 7)(4y - 1) - (4y - 1)(2x + 10)$;

5) $(5m - n)^3(m + 8n)^2 - (5m - n)^2(m + 8n)^3$.

12.16. Представьте в виде произведения многочленов выражение:

1) $(x - 6)(2x - 4) + (x - 6)(8 - x)$;
2) $(x^2 - 2)^4(3y + 5) - (x^2 - 2)(y + 12)$;
3) $(4a - 3b)(5a + 8b) + (3b - 4a)(2a + b)$;
4) $(p - 9)^4(2p + 1)^3 + (p - 9)^3(2p + 1)^4$.

12.17. Решите уравнение, используя разложение на множители:

1) $(x - 3)(x + 7) - (x + 7)(x - 8) = 0$;
2) $(4x - 9)(x - 2) + (1 - x)(x - 2) = 0$;
3) $0{,}2x(x - 5) + 8(x - 5) = 0$;
4) $7(x - 7) - (x - 7)^2 = 0$.

12.18. Решите уравнение, используя разложение на множители:

1) $(2x - 9)(x + 6) - x(x + 6) = 0$;
2) $(3x + 4)(x - 10) + (10 - x)(x - 8) = 0$;
3) $3(3x + 1)^2 - 4(3x + 1) = 0$;
4) $(9x - 12) - x(9x - 12) = 0$.

12.19. Вынесите за скобки общий множитель:

1) $(2x - 6)^2$;
2) $(5y + 5)^2$;
3) $(36x + 30y)^2$;
4) $(2x + 4)^4$;
5) $(6x - 9y)^3$;
6) $(a^2 + ab)^2$;
7) $(-7a - 14ab)^2$;
8) $(3c^4 - 6c^3)^4$.

12.20. Вынесите за скобки общий множитель:

1) $(4x - 4y)^2$;
2) $(18a + 27b)^2$;
3) $(8m - 10n)^3$;
4) $(a^2 - 9a)^2$;
5) $(16x^2y + 40xy^2)^2$;
6) $(22x^4 - 28x^2y^3)^5$.

12.21. Докажите, что значение выражения:

1) $19^5 + 19^4$ кратно 20;
2) $8^{10} - 8^9 - 8^8$ кратно 11;
3) $8^7 + 2^{15}$ кратно 5;
4) $2 \cdot 3^{2006} + 5 \cdot 3^{2005} + 7 \cdot 3^{2004}$ кратно 10;
5) $27^4 - 9^5$ кратно 24;
6) $12^4 - 4^6$ кратно 130.

12.22. Докажите, что значение выражения:

1) $25^{25} - 25^{24}$ делится нацело на 12;
2) $16^4 + 8^5 - 4^7$ делится нацело на 10;
3) $36^5 + 6^9$ делится нацело на 42;
4) $10^5 - 5^7$ делится нацело на 7.

12.23. Найдите предпоследнюю цифру значения выражения $9^{108} + 9^{109}$.

12.24. Докажите, что если:

1) $a + b = 2$, то $a^2b + ab^2 - 2ab = 0$;
2) $3a + 4b = -2$, то $12a^3b + 16a^2b^2 + 32a^2b = 24a^2b$;
3) $a + b = c$, то $a^3b^3c + a^2b^4c - a^2b^3c^2 = 0$.

12.25. Докажите, что если:

1) $a + b + c = 0$, то $a^3b^3c^2 + a^2b^4c^2 + a^2b^3c^3 = 0$;

2) $a^2 - b^2 = 2ab + 1$, то $a^6b^4 - 2a^5b^5 - a^4b^6 = a^4b^4$;

3) $a - 2b = 3$, то $2ab^2 - a^2b + 3ab = 0$.

12.26. Решите уравнение:

1) $8x^2 - 3(x - 4) = 12$;

2) $5x^3 - x(2x - 3) = 3x$;

3) $4x - 0{,}2x(x + 20) = x^3$;

4) $9x(x - 3) + (x - 4)(x - 5) = 20$.

12.27. Найдите корни уравнения:

1) $(3x - 2)(3x + 2) - (2x - 5)(8x - 3) = 4x - 19$;

2) $\frac{1}{3}(12 + x^3) = \frac{1}{9}x^2 + 4$.

12.28. Упростите выражение, используя вынесение общего множителя за скобки:

1) $(a - 1)(a + 2) - (a - 2)(a + 2) + (a - 3)(a + 2) - (a - 4)(a + 2)$;

2) $(3a - 2)(5b^2 - 4b + 10) + (2 - 3a)(5b^2 - 6b + 10)$;

3) $(4a - 7b)(2a^2 - 4ab + b^2) - (4a - 7b)(2a^2 - 4ab - b^2)$.

12.29. Упростите выражение, используя вынесение общего множителя за скобки:

1) $ab(a^2 + ab + b^2) - ab(a^2 - ab + b^2)$;

2) $(a + b)(a + 1) - (a + b)(1 - b) + (b + a)(b - a)$.

12.30. Решите уравнение $4x^2 - 1{,}2x = a$, если один из его корней равен 0,3.

12.31. Решите уравнение $5x^2 + 8x = a$, если один из его корней равен $-1{,}6$.

12.32. Вынесите за скобки общий множитель (n — натуральное число):

1) $a^{n+1} + a^n$;

2) $b^n - b^{n-3}$, $n > 3$;

3) $c^{n+2} + c^{n-4}$, $n > 4$;

4) $d^{2n} - d^n$;

5) $2^{n+3} + 3 \cdot 2^{n+2} - 5 \cdot 2^{n+1}$;

6) $9^{n+1} + 3^{n+2}$;

7) $49^{n+2} - 7^{n+3}$;

8) $64^{n+2} - 32^{n+2} + 16^{n+2}$.

12.33. Разложите на множители (n — натуральное число):

1) $a^{n+2} - a^n$;

2) $3b^{n+2} - 2b^{n+1} + b^n$;

3) $32^n + 16^{2n+1}$;

4) $27^{n+1} + 9^{n+1} - 3^{n+1}$.

12.34. Значение переменной y таково, что значение выражения $y^2 - 4y + 2$ равно 6. Найдите значение выражения:

1) $5y^2 - 20y + 10$;

2) $y^2(y^2 - 4y + 2) - 4y(y^2 - 4y + 2)$;

3) $3y^2 - 12y + 8$.

12.35. Значение переменной a таково, что значение выражения $a^2 + 2a - 5$ равно -4. Найдите значение выражения:

1) $-2a^2 - 4a + 10$;

2) $a^2(a^2 + 2a - 5) + 2a(a^2 + 2a - 5)$;

3) $4a^2 + 8a - 16$.

12.36. При каком значении a не имеет корней уравнение:

1) $(x + 1)(x - 3) - x(x - 3) = ax$;

2) $x(5x - 1) - (x - a)(5x - 1) = 4x - 2a$;

3) $(2x - 5)(x + a) - (2x + 3)(x + 1) = 4$?

12.37. При каком значении a имеет бесконечно много корней уравнение:

1) $(x - 4)(x + a) - (x + 2)(x - a) = -6$;

2) $x(3x - 2) - (x + 2a)(3x + 2) = 5a + 6$?

12.38. Числа a, b и c таковы, что $(a + b)(a + b + c) = 5$, $(b + c)(a + b + c) = 6$, $(a + c)(a + b + c) = 7$. Найдите $(a + b + c)^2$.

12.39. Найдите все двузначные числа, равные произведению своих цифр, увеличенных на 1.

12.40. Значение переменной x таково, что $3x^2 - x = 3$. Найдите значение выражения $6x^2 - 2x + 7$.

12.41. Значение переменной x таково, что $x^2 - 7x = 5$. Найдите значение выражения $x^4 - 7x^3 - 35x - 1$.

12.42. Докажите, что значение выражения 1 111 111 111 – 22 222 является квадратом натурального числа.

12.43. Найдите такие натуральные числа m и n, что $2^m - 2^n = 240$.

Упражнения для повторения

12.44. Упростите выражение:

1) $0{,}42ac^3 \cdot 1\frac{3}{7}a^4c^2$;

2) $1{,}2xyz \cdot 2\frac{1}{6}x^5y^6$;

3) $-2\frac{1}{3}m^2np^3 \cdot \left(\frac{3}{7}np^4\right)^2$;

4) $\left(1\frac{1}{2}x^2y^3\right)^5 \cdot \frac{16}{27}x^8y^2$.

12.45. Содержание соли в морской воде составляет 5 %. Сколько килограммов пресной воды надо добавить к 30 кг морской воды, чтобы содержание соли в полученном растворе составило 3 %?

12.46. Для ремонта школы купили краску. В первый день потратили на 2 банки краски больше, чем половина всей краски, а во второй — $\frac{5}{8}$ количества банок краски, потраченной в первый день. После этого осталось 2 банки. Сколько банок краски купили?

12.47. В коробке лежат 2 красных, 4 зелёных и 10 синих карандашей. Какова вероятность того, что наугад вынутый карандаш будет:

1) красным; 2) зелёным; 3) не зелёным?

Какое наименьшее количество карандашей надо вынуть, чтобы среди них обязательно был синий карандаш?

12.48. Существует ли двузначное число, в котором цифра десятков на 4 больше цифры единиц, а разность между данным числом и числом, записанным теми же цифрами, но в обратном порядке, равна 27?

§ 13 Разложение многочленов на множители. Метод группировки

Многочлен $ax + bx + ay + by$ не удастся разложить на множители методом вынесения за скобки общего множителя, так как множителя, общего для всех слагаемых, нет. Однако члены этого многочлена можно объединить в группы так, что слагаемые каждой группы будут иметь общий множитель:

$$ax + bx + ay + by = (ax + bx) + (ay + by) = x(a + b) + y(a + b).$$

Мы получили выражение, в котором оба слагаемых имеют множитель $(a + b)$. Вынесем его за скобки:

$$x(a + b) + y(a + b) = (a + b)(x + y).$$

Данный многочлен удалось разложить на множители благодаря тому, что мы удобным способом объединили в группы его члены. Описанный приём называют **методом группировки**.

Пример 1. Разложите на множители многочлен:

1) $2ac + 2bc + 5am + 5bm$; 2) $x^4 - 2x^3 - 3x + 6$; 3) $xy - 12 + 4x - 3y$.

Решение. 1) Сгруппировав члены данного многочлена так, чтобы слагаемые в каждой группе имели общий множитель, получим:

$$2ac + 2bc + 5am + 5bm = (2ac + 2bc) + (5am + 5bm) =$$
$$= 2c(a + b) + 5m(a + b) = (a + b)(2c + 5m).$$

Этот же результат можно получить, если слагаемые сгруппировать другим способом:

$$(2ac + 5am) + (2bc + 5bm) = a(2c + 5m) + b(2c + 5m) =$$
$$= (2c + 5m)(a + b).$$

2) $x^4 - 2x^3 - 3x + 6 = (x^4 - 2x^3) - (3x - 6) = x^3(x - 2) - 3(x - 2) = (x - 2)(x^3 - 3)$.

3) $xy - 12 + 4x - 3y = (xy + 4x) + (-12 - 3y) = x(y + 4) - 3(4 + y) = (y + 4)(x - 3)$. ■

Пример 2. Разложите на множители трёхчлен $x^2 + 6x + 8$.

Решение. Представив слагаемое $6x$ в виде суммы $2x + 4x$, применим метод группировки:

$$x^2 + 6x + 8 = x^2 + 2x + 4x + 8 = (x^2 + 2x) + (4x + 8) =$$
$$= x(x + 2) + 4(x + 2) = (x + 2)(x + 4).$$ ■

Упражнения

13.1. Разложите на множители многочлен:

1) $ma + mb + 4a + 4b$;
2) $3x + cy + cx + 3y$;
3) $5a - 5b + ap - bp$;
4) $7m + mn + 7 + n$;
5) $a - 1 + ab - b$;
6) $xy + 8y - 2x - 16$;
7) $ab + ac - b - c$;
8) $3p - 3k - 4ap + 4ak$.

13.2. Представьте в виде произведения многочленов выражение:

1) $ay - 3y - 4a + 12$;
2) $9a + 9 - na - n$;
3) $6x + ay + 6y + ax$;
4) $8x - 8y + xz - yz$;
5) $mn + m - n - 1$;
6) $ab - ac - 2b + 2c$.

13.3. Разложите на множители многочлен:

1) $a^3 + a^2 + a + 1$;
2) $x^5 - 3x^3 + 4x^2 - 12$;
3) $c^6 - 10c^4 - 5c^2 + 50$;
4) $y^3 - 18 + 6y^2 - 3y$;
5) $a^2 - ab + ac - bc$;
6) $20a^3bc - 28ac^2 + 15a^2b^2 - 21bc$;
7) $x^2y^2 + xy + axy + a$;
8) $24x^6 - 44x^4y - 18x^2y^3 + 33y^4$.

13.4. Разложите на множители многочлен:

1) $8c^3 - 2c^2 + 4c - 1$;
2) $x^2y + x + xy^2 + y$;
3) $9a^2b - 3a^2 + 3b^2 - b$;
4) $8a^2 - 2ab - 4ac + bc$;
5) $2b^3 - 7b^2c - 4b + 14c$;
6) $6x^5 + 4x^2y^2 - 9x^3y - 6y^3$.

13.5. Найдите значение выражения, разложив его предварительно на множители:

1) $2a^3 - 3a^2 - 2ab + 3b$, если $a = 0{,}5$, $b = 2{,}25$;
2) $xy + y^2 - 12x - 12y$, если $x = 10{,}8$, $y = -8{,}8$;
3) $27x^3 - 36x^2 + 6x - 8$, если $x = -1\frac{1}{3}$.

13.6. Найдите значение выражения:

1) $2a + b + 2a^2 + ab$, если $a = -3$, $b = 4$;
2) $3x^3 - x^2 - 6x + 2$, если $x = \frac{2}{3}$.

13.7. Вычислите:

1) $3{,}74^2 + 3{,}74 \cdot 2{,}26 - 3{,}74 \cdot 1{,}24 - 2{,}26 \cdot 1{,}24$;
2) $58{,}7 \cdot 1{,}2 + 36 \cdot 3{,}52 - 34{,}7 \cdot 1{,}2 - 2{,}32 \cdot 36$;
3) $2\frac{4}{9} \cdot 3\frac{2}{7} + 1\frac{5}{7} \cdot 2{,}8 + 2\frac{5}{9} \cdot 3\frac{2}{7} + 1\frac{5}{7} \cdot 2{,}2$.

13.8. Найдите значение выражения:

1) $34{,}4 \cdot 13{,}7 - 34{,}4 \cdot 8{,}7 - 15{,}6 \cdot 8{,}7 + 13{,}7 \cdot 15{,}6$;
2) $0{,}6^3 - 2 \cdot 0{,}6^2 \cdot 0{,}8 + 0{,}6 \cdot 0{,}8^2 - 2 \cdot 0{,}8^3$.

13.9. Разложите на множители многочлен:

1) $ax^2 + ay - bx^2 - by + cx^2 + cy$;

2) $a^2b + a + ab^2 + b + 3ab + 3$;
3) $x^3 - x^2 + x^2y + x - xy + y$;
4) $m^2n + mn - 5 - 5m + n - 5m^2$;
5) $x^6 - 2x^5 + 4x^3 - 8x^2 + 5x - 10$;
6) $a^3b + ab^2 - abc^3 - a^2c - bc + c^4$.

13.10. Представьте выражение в виде произведения многочленов:
1) $ab + ac + ad + bx + cx + dx$;
2) $7p - 7k - px + kx + k - p$;
3) $x^3y^3 - x^2y^2 + xy - 6 + 6xy - 6x^2y^2$;
4) $a^5 - a^4b + a^3b^2 - a^2b^3 + ab^4 - b^5$.

13.11. Разложите на множители выражение (n — натуральное число):
1) $a^{n+1} + a^n + a + 1$;
2) $b^{n+2} - b - 1 + b^{n+1}$;
3) $3y^{n+3} - 3y^2 - 5 + 5y^{n+1}$.

13.12. Разложите на множители (n — натуральное число):
1) $x^{n+2} + x^n - x^2 - 1$;
2) $4y^{n+4} + y^{n+2} + 4y^3 + y$.

13.13. Разложите на множители трёхчлен, представив предварительно один из его членов в виде суммы подобных слагаемых:
1) $x^2 + 8x + 12$;
2) $x^2 - 5x + 4$;
3) $x^2 + 7x + 8$;
4) $x^2 - 4x - 5$;
5) $2x^2 - x - 1$;
6) $3x^2 + 4x + 1$.

13.14. Разложите на множители трёхчлен:
1) $x^2 + 4x + 3$;
2) $x^2 - 10x + 16$;
3) $x^2 + 3x - 18$;
4) $x^2 - 4x - 32$;
5) $5y^2 - 6y + 1$;
6) $6z^2 - 5z + 1$.

13.15. Докажите, что при всех натуральных значениях n значение выражения $n^3 + 3n^2 + 2n$ делится нацело на 6.

13.16. Докажите, что при любом натуральном значении n, большем 1, значение выражения $3^{n+2} - 2^{n+2} + 3^n - 2^n$ делится нацело на 10.

13.17. Докажите, что при любом натуральном значении n, большем 1, значение выражения $7^{n+2} - 5^{n+2} + 5^n + 7^n$ делится нацело на 50.

13.18. Значения переменных x и y таковы, что выполняется равенство $x^2 + y^2 = 1$. Найдите значение выражения $2x^4 + 3x^2y^2 + y^4 + y^2$.

13.19. Известно, что $a^2 - b^2 = 2$. Найдите значение выражения $a^6 + a^4b^2 - 2a^2b^4 - 6a^2b^2 - 4b^2$.

13.20. Целые числа a, b и c таковы, что $ab + bc + ac = 1$. Докажите, что значение выражения $(a^2 + 1)(b^2 + 1)(c^2 + 1)$ является квадратом целого числа.

13.21. Целые числа a, b и c таковы, что $a + b + c = 1$. Докажите, что значение выражения $(a + bc)(b + ac)(c + ab)$ является квадратом целого числа.

13.22. (*Задача из русского фольклора.*) Пастушок пригнал на поляну овец. На поляне были колышки. Если к каждому колышку он привяжет по овце, то для одной колышка не хватит. Если же к каждому колышку он привяжет по две овцы, то один колышек останется свободным. Сколько овец пригнал пастушок?

13.23. Различные числа a, b и c таковы, что $a^2(b + c) = b^2(c + a)$. Докажите, что $a^2(b + c) = c^2(a + b)$.

13.24. Пётр и Дмитрий могут прополоть огород, работая вместе, за 2,4 ч. Пётр может сделать это самостоятельно за 4 ч. Сколько времени потребуется Дмитрию, чтобы самостоятельно прополоть огород?

13.25. В одном бидоне было в 4 раза больше молока, чем в другом. Когда из первого бидона перелили 10 л молока во второй, то объём молока во втором бидоне составил $\frac{2}{3}$ объёма молока, оставшегося в первом бидоне. Сколько литров молока было в каждом бидоне сначала?

§ 14 Произведение разности и суммы двух выражений

Нередко в математике, помимо знания общего закона (теоремы), удобно пользоваться правилами, применимыми в частных (особых) случаях.

Например, если надо умножить десятичную дробь на 10, 100, 1000 и т. д., то нет необходимости использовать общий алгоритм умножения в столбик, а гораздо удобнее применить правило переноса запятой.

Особые ситуации встречаются и при умножении многочленов.

Рассмотрим частный случай, когда в произведении двух многочленов один из них представляет собой разность двух выражений, а другой — их сумму.

Имеем:

$$(a - b)(a + b) = a^2 + ab - ba - b^2 = a^2 - b^2.$$

Получили тождество

$$\boxed{(a - b)(a + b) = a^2 - b^2}$$

Теперь при умножении разности выражений на их сумму можно сократить работу, сразу записав результат — разность квадратов этих выражений. Поэтому такое тождество называют **формулой сокращённого умножения**. Её выражает следующее правило.

Произведение разности и суммы двух выражений равно разности квадратов этих выражений.

Пример 1. Выполните умножение многочленов:
1) $(2a - 5b)(2a + 5b)$;
2) $(y^2 + 3x^4)(3x^4 - y^2)$;
3) $(-4mn - p)(4mn - p)$.

Решение. 1) $(2a - 5b)(2a + 5b) = (2a)^2 - (5b)^2 = 4a^2 - 25b^2$.

2) $(y^2 + 3x^4)(3x^4 - y^2) = (3x^4 + y^2)(3x^4 - y^2) = (3x^4)^2 - (y^2)^2 = 9x^8 - y^4$.

3) $(-4mn - p)(4mn - p) = (-p - 4mn)(-p + 4mn) = (-p)^2 - (4mn)^2 = p^2 - 16m^2n^2$. ■

Пример 2. Упростите выражение:
1) $(b - 3)(b + 3) - (2b + 1)(2b - 1)$;
2) $-2x(x + 5)(5 - x)$;
3) $(a^3 - 2)(a^3 + 2)(a^6 + 4)$.

Решение. 1) $(b - 3)(b + 3) - (2b + 1)(2b - 1) = b^2 - 9 - (4b^2 - 1) = b^2 - 9 - 4b^2 + 1 = -3b^2 - 8$.

2) $-2x(x + 5)(5 - x) = -2x(25 - x^2) = -50x + 2x^3$.

3) Применив дважды формулу произведения суммы и разности двух выражений, получим:
$(a^3 - 2)(a^3 + 2)(a^6 + 4) = (a^6 - 4)(a^6 + 4) = a^{12} - 16$. ■

Пример 3. Найдите значение выражения:
$(2 + 1)(2^2 + 1)(2^4 + 1)(2^8 + 1)(2^{16} + 1)(2^{32} + 1) - 2^{64}$.

Решение. Очевидно, что данное выражение равно такому:
$(2 - 1)(2 + 1)(2^2 + 1)(2^4 + 1)(2^8 + 1)(2^{16} + 1)(2^{32} + 1) - 2^{64}$.
Получаем: $(2^2 - 1)(2^2 + 1)(2^4 + 1)(2^8 + 1)(2^{16} + 1)(2^{32} + 1) - 2^{64} =$
$= (2^4 - 1)(2^4 + 1)(2^8 + 1)(2^{16} + 1)(2^{32} + 1) - 2^{64} = \ldots = 2^{64} - 1 - 2^{64} = -1$.

Ответ: -1. ■

1. Запишите формулу произведения разности и суммы двух выражений.

2. Чему равно произведение разности двух выражений и их суммы?

Упражнения

14.1. Какому из данных многочленов тождественно равно произведение $(7a - 2b)(7a + 2b)$:

1) $7a^2 - 2b^2$;
2) $7a^2 + 2b^2$;
3) $49a^2 - 4b^2$;
4) $49a^2 + 4b^2$?

14.2. Выполните умножение многочленов:

1) $(m - n)(m + n)$;
2) $(x - 1)(x + 1)$;
3) $(9 - y)(9 + y)$;
4) $(3b - 1)(3b + 1)$;
5) $(10m - 7)(10m + 7)$;
6) $(4a - b)(b + 4a)$;
7) $(5b + 1)(1 - 5b)$;
8) $(3x - 5y)(3x + 5y)$;
9) $(13c - 10d)(13c + 10d)$;
10) $(8m + 11n)(11n - 8m)$.

14.3. Представьте в виде многочлена выражение:

1) $(c - 2)(c + 2)$;
2) $(12 - x)(12 + x)$;
3) $(3x + y)(3x - y)$;
4) $(6x - 9)(6x + 9)$;
5) $(x + 7)(7 - x)$;
6) $(5a - 8b)(5a + 8b)$;
7) $(8m + 2)(2 - 8m)$;
8) $(13c - 14d)(14d + 13c)$.

14.4. Выполните умножение:

1) $(a^2 - 3)(a^2 + 3)$;
2) $(5 + b^2)(b^2 - 5)$;
3) $(3x - 2y^2)(3x + 2y^2)$;
4) $(10p^3 - 7k)(10p^3 + 7k)$;
5) $(4x^2 - 8y^3)(4x^2 + 8y^3)$;
6) $(11a^3 + 5b^2)(5b^2 - 11a^3)$;
7) $(7 - xy)(7 + xy)$;
8) $\left(8a^3b - \frac{1}{3}ab^2\right)\left(8a^3b + \frac{1}{3}ab^2\right)$;
9) $(0{,}3m^5 + 0{,}1n^3)(0{,}3m^5 - 0{,}1n^3)$;
10) $\left(\frac{7}{9}a^2c - 1{,}4b^4\right)\left(1{,}4b^4 + \frac{7}{9}a^2c\right)$.

14.5. Выполните умножение:

1) $(x^3 + 4)(x^3 - 4)$;
2) $(ab - c)(ab + c)$;
3) $(x - y^2)(y^2 + x)$;
4) $(3m^2 - 2c)(3m^3 + 2c)$;
5) $(6a^3 - 8b)(6a^3 + 8b)$;
6) $(5n^4 - m^4)(5n^4 + m^4)$;
7) $(0{,}2m^8 - 0{,}8n^6)(0{,}2m^8 + 0{,}8n^6)$;
8) $\left(\frac{2}{7}p^7 + \frac{4}{11}k^9\right)\left(\frac{4}{11}k^9 - \frac{2}{7}p^7\right)$.

14.6. Упростите выражение:

1) $(2a - b)(2a + b) + b^2$;
2) $10x^2 + (y - 5x)(y + 5x)$;
3) $64m^2 - (8m + 9)(8m - 9)$;
4) $(4x - 7y)(4x + 7y) + (7x - 4y)(7x + 4y)$;
5) $(a - 2)(a + 3) + (6 - a)(a + 6)$;
6) $3a(a - b) - (3a + 2b)(3a - 2b)$.

14.7. Упростите выражение:

1) $(9a - 2)(9a + 2) - 18a^2$;
2) $25m^2 - (5m - 7)(5m + 7)$;
3) $(b + 7)(b - 4) + (2b - 6)(2b + 6)$;
4) $4x(3x - 10y) - (4x + y)(4x - y)$.

14.8. На какое выражение надо умножить двучлен $0{,}3x^3 - xy^2$, чтобы произведение было равно двучлену $0{,}09x^6 - x^2y^4$?

14.9. На какое выражение надо умножить многочлен $7t^4 + 9p^5$, чтобы произведение было равно многочлену $49t^8 - 81p^{10}$?

14.10. Какие одночлены надо подставить вместо звёздочек, чтобы выполнялось тождество:

1) $(* - 12a)(* + *) = 9b^2 - *$;
2) $(* - 5c)(* + 5c) = 16d^2 - *$;
3) $(0{,}7p + *)(* - 0{,}7p) = \frac{1}{9}m^8 - 0{,}49p^2$;
4) $(3m^2 + *)(* - *) = 9m^4 - n^6$?

14.11. Подставьте вместо звёздочек такие одночлены, чтобы выполнялось тождество:

1) $(8a^2b - *)(8a^2b + *) = * - 25c^6$;
2) $\left(* - \frac{1}{12}x^4y^5\right)\left(\frac{1}{15}a^2 + *\right) = \frac{1}{225}a^4 - \frac{1}{144}x^8y^{10}$.

14.12. Представьте в виде многочлена выражение:

1) $a(a - 2)(a + 2)$;
2) $-3(x + 3)(x - 3)$;
3) $7b^2(b + 4)(4 - b)$;
4) $(c - d)(c + d)(c^2 + d^2)$;
5) $(2a - 1)(2a + 1)(4a^2 + 1)$;
6) $(c^3 - 5)(c^3 + 5)(c^6 + 25)$.

14.13. Выполните умножение:

1) $5b(b - 1)(b + 1)$;
2) $(c + 2)(c - 2) \cdot 8c^2$;
3) $(m - 10)(m^2 + 100)(m + 10)$;
4) $(a^2 + 1)(a^2 - 1)(a^4 + 1)$.

14.14. Выполните умножение двучленов (n — натуральное число):

1) $(a^n - 4)(a^n + 4)$;
2) $(b^{2n} + c^{3n})(b^{2n} - c^{3n})$;
3) $(x^{4n} + y^{n+2})(y^{n+2} - x^{4n})$;
4) $(a^{n+1} - b^{n-1})(a^{n+1} + b^{n-1})$, $n > 1$.

14.15. Упростите выражение:

1) $(8a - 3)(8a + 3) - (7a + 4)(8a - 4)$;
2) $0{,}6m(2m - 1)(2m + 1) + 0{,}3(6 + 5m)(6 - 5m)$;
3) $(7 - 2x)(7 + 2x) - (x - 8)(x + 8) - (4 - 3x)(5 + 3x)$;
4) $-b^2c(4b - c^2)(4b + c^2) + 16b^4c$.

14.16. Упростите выражение:

1) $(x + 1)(x - 1) - (x + 5)(x - 5) + (x + 1)(x - 5)$;
2) $81a^8 - (3a^2 - b^3)(9a^4 + b^6)(3a^2 + b^3)$.

14.17. Решите уравнение:

1) $8x(3 + 2x) - (4x + 3)(4x - 3) = 9x - 6$;
2) $7x - 4x(x - 5) = (8 - 2x)(8 + 2x) + 27x$;
3) $(6x + 7)(6x - 7) + 12x = 12x(3x + 1) - 49$;
4) $(x - 2)(x + 2)(x^2 + 4)(x^4 + 16) = x^8 + 10x$.

14.18. Решите уравнение:

1) $(x - 17)(x + 17) = x^2 + 6x - 49$;
2) $(1{,}2x - 4)(1{,}2x + 4) - (1{,}3x - 2)(1{,}3x + 2) = 0{,}5x(8 - 0{,}5x)$.

14.19. Докажите, что значение выражения не зависит от значения переменной:

1) $(x - 9)(x + 9) - (x + 19)(x - 19)$;

2) $(2a - b)(2a + b) + (b - c)(b + c) + (c - 2a)(c + 2a)$.

14.20. Докажите, что при любом натуральном n значение выражения $(7n + 8)(7n - 8) - (5n + 10)(5n - 10)$ делится нацело на 12.

14.21. Докажите, что не существует такого натурального числа n, при котором значение выражения $(4n + 3)(9n - 4) - (6n - 5)(6n + 5) - 3(n - 2)$ делится нацело на 8.

14.22. Докажите, что при любом натуральном n значение выражения $(9n - 4)(9n + 4) - (8n - 2)(4n + 3) + 5(6n + 9)$ делится нацело на 7.

14.23. Найдите значение выражения:

1) $3^{20} \cdot 6^{20} - (18^{10} - 2)(18^{10} + 2)$;

2) $(5 + 28^{17})(5 - 28^{17}) + 14^{34} \cdot 2^{34}$;

3) $7^{36} \cdot 8^{12} - (14^{18} + 3)(14^{18} - 3)$;

4) $(3^2 - 1)(3^2 + 1)(3^4 + 1)(3^8 + 1)(3^{16} + 1)(3^{32} + 1) - 3^{64}$.

14.24. Чему равно значение выражения:

1) $81^{15} \cdot 8^{20} - (6^{30} + 1)(6^{30} - 1)$;

2) $5^{24} - (5^3 - 2)(5^3 + 2)(5^6 + 4)(5^{12} + 16)$?

14.25. Сравните значения выражений, не вычисляя их:

1) $415 \cdot 425$ и $426 \cdot 414$; 2) $1\,234\,567 \cdot 1\,234\,569$ и $1\,234\,568^2$.

14.26. Сравните значения выражений, не вычисляя их:

1) $253 \cdot 259$ и $252 \cdot 260$; 2) $987\,654^2$ и $987\,646 \cdot 987\,662$.

14.27. Известно, что $a = b + 1$. Упростите выражение:
$(a + b)(a^2 + b^2)(a^4 + b^4)(a^8 + b^8)(a^{16} + b^{16})(a^{32} + b^{32})$.

14.28. Докажите, что:

$$(1 - 2 + 2^2)(1 - 2^2 + 2^4)(1 - 2^4 + 2^8)(1 - 2^8 + 2^{16})(1 - 2^{16} + 2^{32}) = \frac{1 + 2^{32} + 2^{64}}{7}.$$

14.29. Докажите, что значение выражения $1000 \cdot 1002(1001^2 + 1) + 1$ является четвёртой степенью натурального числа.

Упражнения для повторения

14.30. От села до станции Коля может доехать на велосипеде за 3 ч, а дойти пешком — за 7 ч. Скорость движения пешком на 8 км/ч меньше, чем скорость движения на велосипеде. С какой скоростью ездит Коля на велосипеде? На каком расстоянии находится село от станции?

14.31. В одном мешке было 60 кг сахара, а в другом — 100 кг. Когда из второго мешка взяли в 4 раза больше сахара, чем из первого, то в первом осталось в 2 раза больше сахара, чем во втором. Сколько килограммов сахара взяли из каждого мешка?

14.32. Один автомобиль может перевезти собранный с поля урожай за 10 ч, другой — за 12 ч, а третий — за 15 ч. За сколько часов они смогут перевезти урожай, работая вместе?

14.33. (*Старинная египетская задача.*) У каждого из 7 человек есть по 7 кошек. Каждая кошка съедает по 7 мышей, каждая мышь за одно лето может уничтожить 7 ячменных колосков, а из зёрен одного колоска может вырасти 7 горстей ячменного зерна. Масса одной горсти 80 г. Сколько горстей зерна ежегодно спасают благодаря кошкам? Сколько это составляет тонн зерна? Ответ округлите до сотых.

14.34. Решите уравнение:

1) $\frac{4x-1}{12} - \frac{3x+1}{8} = x + 1;$ 2) $\frac{3x-2}{9} - \frac{2x+1}{6} = \frac{5-x}{3}.$

§ 15 Разность квадратов двух выражений

Вы уже знаете два способа разложения многочленов на множители: вынесение общего множителя за скобки и метод группировки. Рассмотрим ещё один способ.

Формулу $(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$ запишем так:

$$\boxed{a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)}$$

Это тождество называют **формулой разности квадратов двух выражений.**

Теперь можно сформулировать следующее правило.

Разность квадратов двух выражений равна произведению разности этих выражений и их суммы.

Приведём примеры применения этой формулы для разложения многочленов на множители.

Пример 1. Разложите на множители:

1) $a^2 - 4;$ 2) $36m^2 - 2\frac{7}{9}n^8;$ 3) $-a^2b^6 + 1.$

Решение. 1) $a^2 - 4 = a^2 - 2^2 = (a - 2)(a + 2).$

2) $36m^2 - 2\frac{7}{9}n^8 = 36m^2 - \frac{25}{9}n^8 = (6m)^2 - \left(\frac{5}{3}n^4\right)^2 =$

$= \left(6m - \frac{5}{3}n^4\right)\left(6m + \frac{5}{3}n^4\right).$

3) $-a^2b^6 + 1 = 1 - a^2b^6 = (1 - ab^3)(1 + ab^3)$. ■

Пример 2. Разложите на множители, используя формулу разности квадратов двух выражений:

1) $100 - (a + 5)^2$; 2) $(2a + 3b)^2 - (3a - b)^2$.

Решение. 1) $100 - (a + 5)^2 = 10^2 - (a + 5)^2 = (10 - (a + 5))(10 + (a + 5)) =$ $= (10 - a - 5)(10 + a + 5) = (5 - a)(15 + a)$.

2) $(2a + 3b)^2 - (3a - b)^2 = ((2a + 3b) - (3a - b))((2a + 3b) + (3a - b)) =$ $= (2a + 3b - 3a + b)(2a + 3b + 3a - b) = (4b - a)(5a + 2b)$. ■

Пример 3. Решите уравнение:

1) $x^2 - 36 = 0$; 2) $(2x - 7)^2 - 81 = 0$.

Решение. 1) Применив формулу разности квадратов и условие равенства произведения нулю, получим:

$$(x - 6)(x + 6) = 0;$$
$$x - 6 = 0 \text{ или } x + 6 = 0;$$
$$x = 6 \text{ или } x = -6.$$

2) Имеем:

$$(2x - 7 - 9)(2x - 7 + 9) = 0;$$
$$(2x - 16)(2x + 2) = 0;$$
$$2x - 16 = 0 \text{ или } 2x + 2 = 0;$$
$$x = 8 \text{ или } x = -1.$$

Ответ: 1) –6; 6; 2) –1; 8. ■

Пример 4. Докажите, что при любом натуральном n значение выражения $(6n + 7)^2 - (2n - 1)^2$ делится нацело на 8.

Решение. $(6n + 7)^2 - (2n - 1)^2 = (6n + 7 - 2n + 1)(6n + 7 + 2n - 1) =$ $= (4n + 8)(8n + 6) = 4(n + 2) \cdot 2(4n + 3) = 8(n + 2)(4n + 3)$.

Данное выражение представлено в виде произведения трёх множителей, один из которых равен 8, а два других — натуральные числа. Отсюда следует, что значение данного выражения делится нацело на 8 при любом натуральном n. ■

?

1. Запишите формулу разности квадратов двух выражений.

2. Сформулируйте правило разложения на множители разности квадратов двух выражений.

Упражнения

15.1. Каким из данных произведений многочленов тождественно равен многочлен $a^2 - 144$:

1) $(a - 12)^2$;
2) $(a - 12)(a + 12)$;
3) $(12 - a)(12 + a)$;
4) $(12 - a)(-12 - a)$?

15.2. Какое из данных равенств является тождеством:

1) $-49 + b^2 = (7 - b)(7 + b)$;
2) $-49 + b^2 = (b - 7)(b + 7)$;
3) $-49 + b^2 = (7 - b)^2$;
4) $-49 + b^2 = (b - 49)(b + 49)$?

15.3. Можно ли, применяя формулу разности квадратов, разложить на множители выражение:

1) $a^2 - 9$;
2) $b^2 + 1$;
3) $4 - c^2$;
4) $25 + x^2$;
5) $1 - y^2$;
6) $16a^2 - b^2$;
7) $81 + 100p^2$;
8) $81 - 100p^2$;
9) $m^2n^2 - 25$;
10) $-m^2n^2 - 25$?

Если можно, то выполните разложение на множители.

15.4. Разложите на множители:

1) $b^2 - d^2$;
2) $x^2 - 1$;
3) $-x^2 + 1$;
4) $36 - c^2$;
5) $4 - 25a^2$;
6) $49a^2 - 100$;
7) $900 - 81k^2$;
8) $16x^2 - 121y^2$;
9) $b^2c^2 - 1$;
10) $\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{9}y^2$;
11) $-4a^2b^2 + 25$;
12) $144x^2y^2 - 400$;
13) $a^2b^2c^2 - 1$;
14) $100a^2 - 0{,}01b^2$;
15) $a^4 - b^2$;
16) $p^2t^2 - 0{,}36k^2d^2$;
17) $y^{10} - 9$;
18) $4x^{12} - 1\frac{11}{25}y^{16}$.

15.5. Разложите на множители:

1) $16 - b^2$;
2) $c^2 - 49$;
3) $(0{,}04 - a^2)$;
4) $x^2 - \frac{4}{9}$;
5) $4x^2 - 25$;
6) $81c^2 - 64d^2$;
7) $0{,}09x^2 - 0{,}25y^2$;
8) $a^2b^4 - c^6d^8$;
9) $4a^2c^2 - 9x^2y^2$;
10) $x^{24} - y^{22}$;
11) $-1600 + a^{12}$;
12) $a^{18} - \frac{49}{64}$.

15.6. Решите уравнение:

1) $x^2 - 49 = 0$;
2) $\frac{1}{4} - z^2 = 0$;
3) $x^2 - 0{,}01 = 0$;
4) $9x^2 - 4 = 0$.

15.7. Решите уравнение:

1) $c^2 - 0{,}25 = 0$;
2) $81x^2 - 121 = 0$;
3) $-0{,}09 + 4x^2 = 0$.

15.8. Разложите на множители, пользуясь формулой разности квадратов:

1) $(x + 2)^2 - 49$;
2) $(x - 10)^2 - 25y^2$;
3) $25 - (y - 3)^2$;
4) $(a - 4)^2 - (a + 2)^2$;
5) $(m - 10)^2 - (n - 6)^2$;
6) $(8y + 4)^2 - (4y - 3)^2$;
7) $(5a + 3b)^2 - (2a - 4b)^2$;
8) $4(a - b)^2 - (a + b)^2$;
9) $(x^2 + x + 1)^2 - (x^2 - x + 2)^2$;
10) $(-3x^3 + y)^2 - 16x^6$.

15.9. Представьте в виде произведения выражение:

1) $(x - 2)^2 - 4$;
2) $(b + 7)^2 - 100c^2$;
3) $121 - (b + 7)^2$;
4) $a^4 - (7b - a^2)^2$;
5) $(4x - 9)^2 - (2x + 19)^2$;
6) $(a + b + c)^2 - (a - b - c)^2$.

15.10. Найдите значение выражения:

1) $(9x - 4)^2 - (7x + 5)^2$, если $x = 1{,}5$;
2) $(5x + 3y)^2 - (3x + 5y)^2$, если $x = 2{,}1$, $y = 1{,}9$.

15.11. Найдите значение выражения $(2{,}5a - 1{,}5b)^2 - (1{,}5a - 2{,}5b)^2$, если $a = -1{,}5$, $b = -3{,}5$.

15.12. Чему равна площадь закрашенной фигуры на рисунке 15.1? Вычислите значение полученного выражения при $a = 7{,}4$ см, $b = 2{,}6$ см.

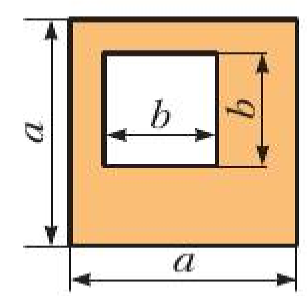


Рис. 15.1

15.13. Две окружности, радиусы которых равны R и r ($R > r$), имеют общий центр. Выразите через π, R и r площадь фигуры, ограниченной этими окружностями. Вычислите значение полученного выражения при $R = 5{,}1$ см, $r = 4{,}9$ см.

15.14. Представьте в виде произведения трёх множителей выражение:

1) $m^4 - 625$;
2) $x^{16} - 81$;
3) $2^{4n} - 16$, где n — натуральное число;
4) $c^{20} - y^{12}$.

15.15. Разложите на множители:

1) $a^8 - b^8$;
2) $a^{16} - 256$;
3) $x^8 - z^{20}$.

15.16. Решите уравнение:

1) $(3x - 5)^2 - 49 = 0$;
2) $(4x + 7)^2 - 9x^2 = 0$;
3) $(a - 1)^2 - (2a + 9)^2 = 0$;
4) $25(3b + 1)^2 - 16(2b - 1)^2 = 0$.

15.17. Решите уравнение:

1) $16 - (6 - 11x)^2 = 0$;
2) $(7m - 13)^2 - (9m + 19)^2 = 0$.

15.18. Докажите, что при любом натуральном n значение выражения:

1) $(7n + 4)^2 - 9$ делится нацело на 7;
2) $(8n + 1)^2 - (3n - 1)^2$ делится нацело на 11;
3) $(3n + 7)^2 - (3n - 5)^2$ делится нацело на 24;
4) $(7n + 6)^2 - (2n - 9)^2$ делится нацело на 15.

15.19. Докажите, что при любом натуральном n значение выражения:

1) $(5n + 4)^2 - (5n - 4)^2$ делится нацело на 80;

2) $(9n + 10)^2 - (9n + 8)^2$ делится нацело на 36;

3) $(10n + 2)^2 - (4n - 10)^2$ делится нацело на 12.

15.20. Докажите, что:

1) разность квадратов двух последовательных натуральных чисел равна сумме этих чисел;

2) разность квадратов двух последовательных чётных чисел делится нацело на 4.

15.21. Докажите, что:

1) разность квадратов двух последовательных чётных чисел равна удвоенной сумме этих чисел;

2) разность квадратов двух последовательных нечётных чисел делится нацело на 8.

15.22. Докажите тождество:

$$(m^3 - n^3)^2(m^3 + n^3)^2 - (m^6 + n^6)^2 = -4m^6n^6.$$

15.23. Разность квадратов двух двузначных чисел, записанных одними и теми же цифрами, равна 693. Найдите эти числа.

15.24. Остаток от деления на 7 одного натурального числа равен 4, а другого — 3. Докажите, что разность квадратов этих чисел кратна 7.

15.25. При каком значении b уравнение $(b^2 - 4)x = b - 2$:

1) имеет бесконечно много корней;

2) не имеет корней;

3) имеет один корень?

15.26. При каком значении a уравнение $(a^2 - 25)x = a + 5$:

1) имеет бесконечно много корней;

2) не имеет корней;

3) имеет один корень?

15.27. Найдите значение выражения $\left(1 - \frac{1}{4}\right)\left(1 - \frac{1}{9}\right)\left(1 - \frac{1}{16}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{144}\right)$.

Упражнения для повторения

15.28. Лодка двигалась 2,4 ч по течению реки и 3,6 ч против течения. Расстояние, пройденное лодкой по течению, на 5,4 км больше расстояния, пройденного против течения. Найдите собственную скорость лодки, если скорость течения составляет 2,5 км/ч.

15.29. За 3 дня продали 130 кг апельсинов. Во второй день продали $\frac{4}{9}$ того, что продали в первый день, а в третий — столько, сколько в первые два дня вместе. Сколько килограммов апельсинов продали в первый день?

15.30. В последовательности ..., a, b, c, d, 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, ... каждое число равно сумме двух предыдущих. Чему равно число a?

15.31. Решите уравнение:

1) $\frac{2x-1}{8} - \frac{x+2}{4} = x;$

2) $3(2x + 3) - 2(3x + 5) = -1.$

15.32. Для каждой пары выражений найдите все значения a, при которых значение второго выражения в 3 раза больше соответствующего значения первого выражения:

1) a и $3a$; 2) a^2 и $3a^2$; 3) $a^2 + 1$ и $3a^2 + 3$.

§ 16 Квадрат суммы и квадрат разности двух выражений. Квадрат суммы нескольких выражений

Преобразуем в многочлен выражение $(a + b)^2$. Имеем:

$$(a + b)^2 = (a + b)(a + b) = a^2 + ab + ba + b^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

Итак,

$$\boxed{(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2}$$

Это тождество называют **формулой квадрата суммы двух выражений.**

Теперь можно сформулировать следующее правило.

Квадрат суммы двух выражений равен квадрату первого выражения плюс удвоенное произведение первого и второго выражений плюс квадрат второго выражения.

Преобразуем в многочлен выражение $(a - b)^2$. Имеем:

$$(a - b)^2 = (a - b)(a - b) = a^2 - ab - ba + b^2 = a^2 - 2ab + b^2.$$

Мы получили **формулу квадрата разности двух выражений:**

$$\boxed{(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2}$$

Квадрат разности двух выражений равен квадрату первого выражения минус удвоенное произведение первого и второго выражений плюс квадрат второго выражения.

Заметим, что формулу квадрата разности двух выражений можно получить с помощью формулы квадрата суммы двух выражений:

$$(a - b)^2 = (a + (-b))^2 = a^2 + 2a(-b) + (-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2.$$

Возведём в квадрат трёхчлен $a + b + c$. Имеем:

$(a + b + c)^2 = (a + b + c)(a + b + c) = a^2 + ab + ac + ab + b^2 + bc + ac + bc + c^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ac.$

Мы получили **формулу квадрата суммы трёх выражений:**

$$\boxed{(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc}$$

Квадрат суммы трёх выражений равен сумме квадратов этих выражений, сложенной с суммой удвоенных произведений каждых двух выражений.

Рассуждая аналогично, можно получить формулу квадрата суммы четырёх и более выражений. Например, запишем формулу квадрата суммы четырёх выражений:

$$(a + b + c + d)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 2ab + 2ac + 2ad + 2bc + 2bd + 2cd.$$

С помощью полученных формул можно проще возводить в квадрат сумму нескольких выражений, не используя правило умножения двух многочленов. Поэтому их относят к формулам сокращённого умножения.

Пример 1. Представьте в виде многочлена выражение:

1) $(3b - 4c)^2$; 2) $(a^3 + 5a)^2$; 3) $(a + b - c)^2$.

Решение. 1) По формуле квадрата разности двух выражений получаем:

$$(3b - 4c)^2 = (3b)^2 - 2 \cdot 3b \cdot 4c + (4c)^2 = 9b^2 - 24bc + 16c^2.$$

2) По формуле квадрата суммы двух выражений получаем:

$$(a^3 + 5a)^2 = (a^3)^2 + 2 \cdot a^3 \cdot 5a + (5a)^2 = a^6 + 10a^4 + 25a^2.$$

3) Представим данное выражение в виде $(a + b + (-c))^2$. Теперь можно воспользоваться формулой квадрата суммы трёх выражений. Имеем: $(a + b + (-c))^2 = a^2 + b^2 + (-c)^2 + 2ab + 2a(-c) + 2b(-c) = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab - 2ac - 2bc$. ■

Пример 2. Преобразуйте в многочлен выражение:

1) $(-a - b)^2$; 2) $(-x^2 - 6)^2$.

Решение. 1) Имеем: $(-a-b)^2 = (-a)^2 - 2(-a) \cdot b + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

Этот пример можно решить другим способом.

Так как $(-a-b)^2 = (-1 \cdot (a+b))^2 = (-1)^2 \cdot (a+b)^2 = (a+b)^2$, т. е. выражения $(-a-b)^2$ и $(a+b)^2$ тождественно равны, то:

$$(-a-b)^2 = (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

2) $(-x^2-6)^2 = (x^2+6)^2 = x^4 + 12x^2 + 36$. ■

Пример 3. Решите уравнение $(x-10)^2 = (x+7)^2 - 17$.

Решение.

$$x^2 - 20x + 100 = x^2 + 14x + 49 - 17;$$
$$x^2 - 20x - x^2 - 14x = 49 - 17 - 100;$$
$$-34x = -68;$$
$$x = 2.$$

Ответ: 2. ■

Пример 4. Докажите, что остаток при делении квадрата натурального числа на число 3 равен 0 или 1.

Решение. Пусть n — некоторое натуральное число. Рассмотрим три случая.

1) Число n кратно 3. Тогда $n = 3k$, где k — натуральное число.

Имеем: $n^2 = (3k)^2 = 9k^2$. Значение выражения $9k^2$ кратно 3, т. е. остаток при делении n^2 на 3 равен 0.

2) Остаток при делении на 3 числа n равен 1. Тогда n можно представить в виде $n = 3k + 1$, где k — натуральное число.

Имеем:

$n^2 = (3k+1)^2 = 9k^2 + 6k + 1 = 3(3k^2 + 2k) + 1 = 3p + 1$, где $p = 3k^2 + 2k$ — неполное частное при делении n^2 на 3, а остаток при этом равен 1.

3) Остаток при делении на 3 числа n равен 2. Тогда $n = 3k + 2$, где k — натуральное число; $n^2 = (3k+2)^2 = 9k^2 + 12k + 4 = (9k^2 + 12k + 3) + 1 = 3(3k^2 + 4k + 1) + 1$. Очевидно, что и в этом случае остаток при делении n^2 на 3 равен 1. ■

?

1. Какое тождество называют формулой квадрата суммы двух выражений? Трёх выражений?
2. Сформулируйте правило возведения в квадрат суммы двух выражений.
3. Какое тождество называют формулой квадрата разности двух выражений?
4. Сформулируйте правило возведения в квадрат суммы трёх выражений.
5. Сформулируйте правило возведения в квадрат разности двух выражений.

Упражнения

16.1. Какому из данных многочленов тождественно равно выражение $(5a + 3)^2$:

1) $25a^2 + 15a + 9$;
2) $25a^2 + 30a + 9$;
3) $25a^2 + 9$;
4) $5a^2 + 3$?

16.2. Какое из данных равенств является тождеством:

1) $(12a - b)^2 = 144a^2 - b^2$;
2) $(12a - b)^2 = 144a^2 + 24ab + b^2$;
3) $(12a - b)^2 = 144a^2 - 24ab + b^2$;
4) $(12a - b)^2 = 12a^2 - 24ab + b^2$?

16.3. Представьте в виде многочлена выражение:

1) $(a + x)^2$;
2) $(x + 2)^2$;
3) $(y - 1)^2$;
4) $(5 - p)^2$;
5) $(4 + k)^2$;
6) $(3a - 2)^2$;
7) $(7b + 6)^2$;
8) $(8x + 4y)^2$;
9) $(0{,}4m - 0{,}5n)^2$;
10) $\left(3a + \frac{1}{3}b\right)^2$;
11) $(y - 13)^2$;
12) $(13 - y)^2$;
13) $(b^2 - 11)^2$;
14) $(a^2 + 4b)^2$;
15) $(x^2 + y^3)^2$;
16) $(a^3 - 4b)^2$;
17) $(a^2 + a)^2$;
18) $(3b^2 - 2b^5)^2$.

16.4. Выполните возведение в квадрат:

1) $(a + 8)^2$;
2) $(b - 2)^2$;
3) $(7 + c)^2$;
4) $(6 - d)^2$;
5) $(2m + 1)^2$;
6) $(4x - 3)^2$;
7) $(5m - 4n)^2$;
8) $(10c + 7d)^2$;
9) $\left(4x - \frac{1}{8}y\right)^2$;
10) $(0{,}3a + 0{,}9b)^2$;
11) $(c^2 - 6)^2$;
12) $(15 + k^2)^2$;
13) $(m^2 - 3n)^2$;
14) $(m^4 - n^3)^2$;
15) $(5a^4 - 2a^7)^2$.

16.5. Упростите выражение:

1) $a^2 + (3a - b)^2$;
2) $(4x + 5)^2 - 40x$;
3) $50a^2 - (7a - 1)^2$;
4) $c^2 + 36 - (c - 6)^2$;
5) $(x - 2)^2 + x(x + 10)$;
6) $3m(m - 4) - (m + 2)^2$;
7) $(y - 9)^2 + (4 - y)(y + 6)$;
8) $(x - 4)(x + 4) - (x - 1)^2$;
9) $(2a - 3b)^2 + (3a + 2b)^2$;
10) $(x - 5)^2 - (x - 7)(x + 7)$.

16.6. Упростите выражение:

1) $(x - 12)^2 + 24x$;
2) $(x + 8)^2 - x(x + 5)$;
3) $2x(x + 2) - (x - 2)^2$;
4) $(y + 7)^2 + (y + 2)(y - 7)$;
5) $(a + 1)(a - 1) - (a + 4)^2$;
6) $(x - 10)(9 - x) + (x + 10)^2$.

16.7. Решите уравнение:

1) $(x - 8)^2 - x(x + 6) = -2$;
2) $(x + 7)^2 = (x - 3)(x + 3)$;
3) $(2x + 1)^2 - (2x - 1)(2x + 3) = 0$;
4) $x(x - 2) - (x + 5)^2 = 35$.

16.8. Решите уравнение:

1) $(x+9)^2 - x(x+8) = 1$;
2) $(x-11)^2 = (x-7)(x-9)$;
3) $(x-4)(x+4) - (x+6)^2 = -16$;
4) $(1-3x)^2 - x(9x-2) = 5$.

16.9. Замените звёздочки такими одночленами, чтобы образовалось тождество:

1) $(* + b)^2 = * + 4ab + b^2$;
2) $(4x - *)^2 = 16x^2 - * + 100y^2$;
3) $(* - 5c)^2 = * - 20b^2c + 25c^2$;
4) $(7a^2 + *)^2 = * + * + 9b^6$.

16.10. Замените звёздочки такими одночленами, чтобы образовалось тождество:

1) $(* + 6b)^2 = * + 24ab + *$;
2) $(* - *)^2 = 9m^4 - 42m^2n^8 + *$.

16.11. Докажите тождество $(a-b)^2 = (b-a)^2$.

16.12. Преобразуйте в многочлен выражение:

1) $(-x+1)^2$;
2) $(-m-9)^2$;
3) $(-5a+3b)^2$;
4) $(-4x-8y)^2$;
5) $(-0{,}7c-10d)^2$;
6) $\left(-4a^2+\frac{1}{8}ab\right)^2$.

16.13. Выполните возведение в квадрат:

1) $(-3m+7n)^2$;
2) $(-0{,}4x-1{,}5y)^2$;
3) $(-x^2-y)^2$;
4) $(-a^2b^2+c^{10})^2$.

16.14. Выполните возведение в квадрат:

1) $(10a^2 - 7ab^2)^2$;
2) $(0{,}8b^3 + 0{,}2b^2c^4)^2$;
3) $(30m^3n + 0{,}04n^2)^2$;
4) $(0{,}5x^4y^5 - 20y^6)^2$;
5) $\left(1\frac{1}{3}a^2b + 2\frac{1}{4}ab^2\right)^2$;
6) $\left(2\frac{1}{3}x^3y^2 - \frac{9}{14}y^8x\right)^2$;
7) $\left(15m^9 + \frac{5}{6}m^3\right)^2$;
8) $\left(3\frac{1}{8}x^8y^{10} + \frac{16}{25}x^2y^6\right)^2$.

16.15. Преобразуйте в многочлен выражение:

1) $6(1-2c)^2$;
2) $-12\left(x+\frac{1}{3}y\right)^2$;
3) $a(a-6b)^2$;
4) $5b(b^2+7b)^2$;
5) $(a+3)(a-4)^2$;
6) $(2x+4)^2(x-8)$;
7) $(a-5)^2(a+5)^2$;
8) $(3x+4y)^2(3x-4y)^2$;
9) $(x+y-1)^2$;
10) $(a^2-b-c^2)^2$.

16.16. Представьте в виде многочлена выражение:

1) $(0{,}02p^3k + 20p^2k^4)^2$;
2) $\left(1\frac{1}{6}mn - \frac{4}{21}m^2n^5\right)^2$;
3) $-15\left(\frac{1}{3}a - \frac{1}{5}b\right)^2$;
4) $7x(x^3-2x)^2$;

5) $(5y-2)^2(2y+1)$; 7) $(m-2n+3)^2$.
6) $(10p-k)^2(10p+k)^2$;

16.17. Упростите выражение и найдите его значение:
1) $(a+3)^2-(a-9)(a+9)$, если $a=-2{,}5$;
2) $(5x-8)^2-(4x-3)^2+26x$, если $x=-\frac{1}{3}$;
3) $(3y^2+4)^2+(3y^2-4)^2-2(1-3y^2)(1+3y^2)$, если $y=\frac{1}{2}$.

16.18. Упростите выражение и найдите его значение:
1) $2m(m-6)^2-m^2(2m-15)$, если $m=-4$;
2) $(2x-5)^2-4(x+1)(x-7)$, если $x=-3{,}5$.

16.19. При каком значении переменной значение квадрата двучлена $x+12$ на 225 больше значения квадрата двучлена $x-13$?

16.20. Решите уравнение:
1) $(x-12)(x+12)=2(x-6)^2-x^2$;
2) $(3x-1)^2+(4x+2)^2=(5x-1)(5x+1)$;
3) $(6x-1)^2-(3-8x)(3+8x)=(10x+1)^2$;
4) $5(x+2)^2+(2x-1)^2-9(x+3)(x-3)=22$.

16.21. Решите уравнение:
1) $(3x+2)^2+(4x-1)(4x+1)=(5x-1)^2$;
2) $(4x+1)^2-(1-3x)(1+3x)=(5x+2)^2$;
3) $2(m+1)^2+3(m-1)^2-5(m+1)(m-1)=-4$.

16.22. Найдите сторону квадрата, если при увеличении её на 5 см получится квадрат, площадь которого на 95 см^2 больше площади данного.

16.23. Если сторону квадрата уменьшить на 8 см, то получится квадрат, площадь которого на 352 см^2 меньше площади данного. Найдите сторону данного квадрата.

16.24. Найдите три последовательных натуральных числа, если удвоенный квадрат большего из них на 79 больше суммы квадратов двух других чисел.

16.25. Найдите четыре последовательных натуральных числа, если сумма квадратов второго и четвёртого из них на 82 больше, чем сумма квадратов первого и третьего.

16.26. При каких значениях a и b верно равенство:
1) $(a+b)^2=a^2+b^2$; 2) $(a-b)^2=(a+b)^2$?

16.27. Докажите тождество:
1) $(a+b)^2+(a-b)^2=2(a^2+b^2)$;
2) $(a+b)^2-(a-b)^2=4ab$;
3) $a^2+b^2=(a+b)^2-2ab$;
4) $(a^2+b^2)(c^2+d^2)=(ac+bd)^2+(ad-bc)^2$.

16.28. Докажите тождество:

1) $a^2 + b^2 = (a - b)^2 + 2ab$;

2) $(a - b)^2 + (ab + 1)^2 = (a^2 + 1)(b^2 + 1)$.

16.29. Докажите, что значение выражения не зависит от значения переменной:

1) $(x - 3)^2 + (x + 3)^2 - 2(x - 6)(x + 6)$;

2) $(4x^3 + 5)^2 + (2x^3 - 1)^2 - 4(5x^3 + 4)(x^3 + 1)$.

16.30. Докажите, что значение выражения $(6x - 8)^2 + (8x + 6)^2 - (10x - 1)(10x + 1)$ не зависит от значения переменной.

16.31. Каким числом, чётным или нечётным, является квадрат нечётного натурального числа?

16.32. Древнегреческий учёный Евклид (III в. до н. э.) доказывал формулы квадрата суммы и квадрата разности двух выражений геометрически. Пользуясь рисунками 16.1 и 16.2, восстановите его доказательство.

16.33. С помощью рисунка 16.3 докажите формулу квадрата суммы трёх выражений.

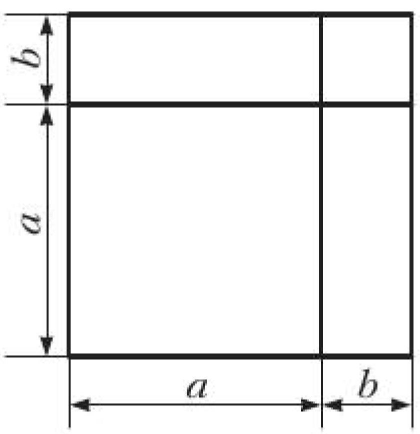


Рис. 16.1

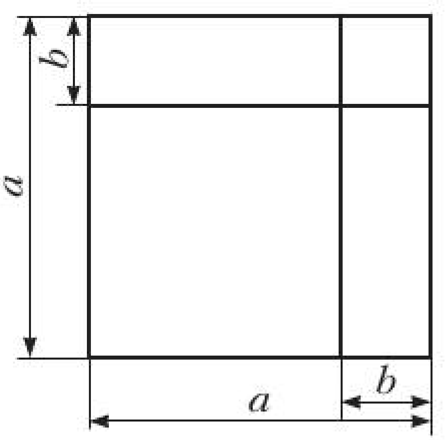


Рис. 16.2

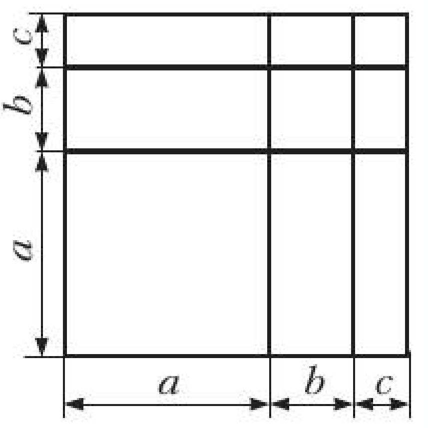


Рис. 16.3

16.34. Чему равен остаток при делении квадрата нечётного натурального числа на 8?

16.35. Выясните, какой остаток может давать квадрат натурального числа при делении на 4.

16.36. Докажите, что разность суммы квадратов двух последовательных целых чисел и их удвоенного произведения не зависит от выбора чисел.

16.37. Докажите, что если остаток при делении натурального числа на 16 равен 4, то квадрат этого числа делится нацело на 16.

16.38. Докажите, что если остаток при делении натурального числа на 25 равен 5, то квадрат этого числа кратен 25.

16.39. Остаток при делении некоторого натурального числа на 9 равен 5. Чему равен остаток при делении на 9 квадрата этого числа?

16.40. Остаток при делении некоторого натурального числа на 11 равен 6. Чему равен остаток при делении на 11 квадрата этого числа?

16.41. Используя формулы сокращённого умножения, представьте в виде многочлена выражение:

1) $(a + b + c)(a + b - c)$;
2) $(a + b + c)(a - b - c)$;
3) $(a + b + c + d)(a + b - c - d)$.

16.42. Используя формулы сокращённого умножения, представьте в виде многочлена выражение:

1) $(a - b - c)(a + b - c)$; 2) $(a - b + c + d)(a - b - c - d)$.

16.43. При каком значении a уравнение $(6x - a)^2 + (8x - 3)^2 = (10x - 3)^2$ не имеет корней?

16.44. При каком значении a уравнение $(2a - 3x)^2 + (x - 1)^2 = 10(x - 2)(x + 2)$ не имеет корней?

16.45. Докажите тождество:

$$(2n + 1)^2 + (2n^2 + 2n)^2 = (2n^2 + 2n + 1)^2.$$

Данное тождество является правилом великого древнегреческого учёного Пифагора (VI в. до н. э.) для вычисления целочисленных значений длин сторон прямоугольного треугольника. При одних и тех же натуральных значениях n значения выражений $2n + 1$, $2n^2 + 2n$, $2n^2 + 2n + 1$ являются длинами сторон прямоугольного треугольника.

16.46. Докажите, что сумма квадратов пяти последовательных натуральных чисел не может являться квадратом натурального числа.

Упражнения для повторения

16.47. В корнеплодах сахарной свёклы содержится 25 % сахара, в то время как в стеблях сахарного тростника — только 18 %. Сколько тонн сахарного тростника надо переработать, чтобы получить столько же сахара, сколько из 3600 т сахарной свёклы?

16.48. В магазин привезли 740 кг апельсинов и бананов в 80 ящиках. В одном ящике было 10 кг апельсинов или 8 кг бананов. Сколько килограммов апельсинов привезли в магазин?

16.49. В первой коробке было 45 шаров, из них 15 белых, во второй — 75 шаров, из них 25 белых, в третьей — 24 белых и 48 красных шаров, в четвёртой — поровну белых, красных и зелёных шаров. Из какой коробки больше вероятность наугад вынуть белый шар?

16.50. Какое наименьшее значение и при каком значении переменной может принимать выражение:

1) x^2; 2) $x^2 - 16$; 3) $(x + 4)^2 + 20$?

16.51. Какое наибольшее значение и при каком значении переменной может принимать выражение:

1) $-x^2$; 2) $-x^2 + 4$; 3) $12 - (x - 1)^2$?

16.52. При каком значении переменной выполняется равенство:

1) $(x - 1)^2 + (x + 1)^2 = -10$;
2) $(x - 1)^2 + (x + 1)^2 = 0$;
3) $(x^2 - 1)^2 + (x + 1)^2 = 0$?

16.53. При каких значениях переменных x и y выполняется равенство:

1) $(x + 2)^2 + (y - 6)^2 = -1$; 2) $(x + 2)^2 + (y - 6)^2 = 0$?

§ 17 Преобразование многочлена в квадрат суммы или разности двух выражений либо в квадрат суммы нескольких выражений

Запишем формулы квадрата суммы и квадрата разности двух выражений, поменяв местами их левые и правые части:

$$\boxed{\begin{aligned} a^2 + 2ab + b^2 &= (a + b)^2 \\ a^2 - 2ab + b^2 &= (a - b)^2 \end{aligned}}$$

В таком виде эти формулы в ряде случаев позволяют «свернуть» трёхчлен в квадрат двучлена.

Трёхчлен, который можно представить в виде квадрата двучлена, называют **полным квадратом**.

Запишем формулу квадрата суммы трёх выражений так:

$$\boxed{a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc = (a + b + c)^2}$$

Эта формула в ряде случаев позволяет преобразовывать многочлен в **квадрат трёхчлена**.

Пример 1. Представьте трёхчлен в виде квадрата двучлена:
1) $x^2 + 10x + 25$;
2) $9a^6 - 42a^3b^2 + 49b^4$.

Решение. 1) $x^2 + 10x + 25 = x^2 + 2 \cdot x \cdot 5 + 25 = (x + 5)^2$.

2) $9a^6 - 42a^3b^2 + 49b^4 = (3a^3)^2 - 2 \cdot 3a^3 \cdot 7b^2 + (7b^2)^2 = (3a^3 - 7b^2)^2$. ■

Пример 2. Найдите, пользуясь преобразованием выражения в квадрат двучлена, значение суммы $5{,}2^2 + 10{,}4 \cdot 4{,}8 + 4{,}8^2$.

Решение. $5{,}2^2 + 10{,}4 \cdot 4{,}8 + 4{,}8^2 = 5{,}2^2 + 2 \cdot 5{,}2 \cdot 4{,}8 + 4{,}8^2 = (5{,}2 + 4{,}8)^2 = 10^2 = 100$. ■

Пример 3. Решите уравнение $4x^2 - 12x + 9 = 0$.

Решение. Представим левую часть уравнения в виде квадрата разности:

$$(2x - 3)^2 = 0.$$

Так как значение квадрата равно нулю тогда и только тогда, когда его основание равно нулю, то получаем:

$$2x - 3 = 0;$$
$$x = 1{,}5.$$

Ответ: 1,5. ■

Пример 4. Докажите, что значение выражения $(2x + 1)^2 - 2(2x + 1)(2x - 5) + (2x - 5)^2$ не зависит от значения переменной.

Решение. $(2x + 1)^2 - 2(2x + 1)(2x - 5) + (2x - 5)^2 = ((2x + 1) - (2x - 5))^2 = (2x + 1 - 2x + 5)^2 = 6^2 = 36$. ■

Пример 5. Докажите, что при любом натуральном n значение выражения $n(n + 1)(n + 2)(n + 3) + 1$ является квадратом натурального числа.

Решение. $n(n + 1)(n + 2)(n + 3) + 1 = (n(n + 3))((n + 1)(n + 2)) + 1 = (n^2 + 3n)(n^2 + 3n + 2) + 1 = (n^2 + 3n)^2 + 2(n^2 + 3n) + 1 = (n^2 + 3n + 1)^2$. ■

Пример 6. Докажите, что выражение $x^2 - 4x + 5$ принимает положительные значения при любых значениях x. Какое наименьшее значение принимает выражение и при каком значении x?

Решение. Преобразуем данное выражение:

$$x^2 - 4x + 5 = x^2 - 4x + 4 + 1 = (x - 2)^2 + 1.$$

Представление выражения в виде суммы, одним из слагаемых которой является квадрат некоторого выражения (в нашем примере это $(x - 2)^2$), называют **выделением полного квадрата** из данного выражения.

Так как $(x - 2)^2 \geqslant 0$ при любых значениях x, то выражение $(x - 2)^2 + 1$ принимает только положительные значения. Также понятно, что $(x - 2)^2 + 1 \geqslant 1$. Отсюда наименьшее значение, равное 1, данное выражение принимает при $x = 2$. ■

Пример 7. При каких значениях x и y значение многочлена $x^2 + y^2 - 12x + 4y + 40$ равно нулю?

Решение. $x^2 + y^2 - 12x + 4y + 40 = x^2 - 12x + 36 + y^2 + 4y + 4 = (x - 6)^2 + (y + 2)^2$.

Мы представили данный многочлен в виде суммы двух слагаемых, которые могут принимать только неотрицательные значения. Их сумма, а следовательно, и данный многочлен будут принимать нулевое значение тогда и только тогда, когда каждое из слагаемых будет равно нулю, т. е. когда $x = 6$ и $y = -2$.

Ответ: $x = 6$, $y = -2$. ■

Пример 8. Числа a, b и c таковы, что $a^2 + b^2 + c^2 = 12$ и $ab - ac - bc = 2$. Найдите значение выражения $a + b - c$.

Решение. Имеем: $2ab - 2ac - 2bc = 4$. Тогда $a^2 + b^2 + c^2 + 2ab - 2ac - 2bc = 16$. Запишем это равенство так: $(a + b - c)^2 = 16$. Отсюда $a + b - c = 4$ или $a + b - c = -4$. ■

Упражнения

17.1. Какому из данных выражений тождественно равен многочлен $a^2 - 18a + 81$:

1) $(a - 3)^2$;
2) $a - 9$;
3) $(a - 9)(a + 9)$;
4) $(a - 9)^2$?

17.2. Какое из данных равенств является тождеством:

1) $a^2 + 8ab + 16b^2 = (a + 8b)^2$;
2) $a^2 + 8ab + 16b^2 = (a + 4b)^2$;
3) $a^2 + 8ab + 16b^2 = (ab + 4)^2$;
4) $a^2 + 8ab + 16b^2 = (a + 2b)^2$?

17.3. Представьте многочлен в виде квадрата суммы или квадрата разности двух выражений:

1) $a^2 + 2a + 1$;
2) $x^2 - 12x + 36$;
3) $y^2 - 18y + 81$;
4) $100 - 20c + c^2$;
5) $a^2 - 6ab + 9b^2$;
6) $9a^2 - 30ab + 25b^2$;
7) $b^4 - 2b^2c + c^2$;
8) $m^8 + m^4n^2 + \frac{1}{4}n^4$;
9) $36a^2b^2 - 12ab + 1$;
10) $x^4 + 2x^2 + 1$;
11) $\frac{1}{16}x^4 - 2x^2y^3 + 16y^6$;
12) $0{,}01a^8 + 25b^{14} - a^4b^7$.

17.4. Представьте трёхчлен в виде квадрата двучлена:

1) $b^2 - 2b + 1$;
2) $4 + 4n + n^2$;
3) $x^2 - 14x + 49$;
4) $4a^2 + 4ab + b^2$;
5) $9x^2 - 24xy + 16y^2$;
6) $a^6 - 2a^3 + 1$;
7) $36a^6 - 84a^3b^5 + 49b^{10}$;
8) $81x^4y^8 - 36x^2y^4z^6 + 4z^{12}$.

17.5. Найдите значение выражения, представив его предварительно в виде квадрата двучлена:

1) $y^2 - 8y + 16$, если $y = -4$;
2) $c^2 + 24c + 144$, если $c = -10$;
3) $25x^2 - 20xy + 4y^2$, если $x = 3$, $y = 5{,}5$;
4) $49a^2 + 84ab + 36b^2$, если $a = 1\frac{1}{7}$, $b = 2\frac{5}{6}$.

17.6. Найдите значение выражения:

1) $b^2 - 30b + 225$, если $b = 6$;
2) $100a^2 + 60ab + 9b^2$, если $a = 0{,}8$, $b = -3$.

17.7. Какой одночлен следует подставить вместо звёздочки, чтобы можно было представить в виде квадрата двучлена выражение:

1) $* - 56a + 49$;
2) $9c^2 - 12c + *$;
3) $* - 42xy + 49y^2$;
4) $0{,}01b^2 + * + 100c^2$;
5) $a^2b^2 - 4a^3b^5 + *$;
6) $1{,}44x^2y^4 - *y + 0{,}25y^6$;
7) $64 - 80y^{20} + *y^{40}$;
8) $\frac{9}{25}a^6b^2 - a^5b^5 + *$?

17.8. Замените звёздочки такими одночленами, чтобы выполнялось тождество:

1) $n^2 + 60n + * = (* + 30)^2$;
2) $25c^2 - * + * = (* - 8k)^2$;
3) $225a^2 - * + 64b^4 = (* - *)^2$;
4) $0{,}04x^2 + * + * = (* + 0{,}3y^3)^2$.

17.9. Представьте, если это возможно, в виде квадрата двучлена или в виде выражения, противоположного квадрату двучлена, трёхчлен:

1) $-8x + 16 + x^2$;
2) $a^8 + 4a^4b^3 + 4b^6$;
3) $2x - 25 - 0{,}04x^2$;
4) $25m^2 - 15mn + 9n^2$;
5) $81c^2 - 54b^2c + 9b^2$;
6) $b^{10} - a^2b^5 + 0{,}25a^4$;
7) $\frac{1}{16}x^2 - xy + 4y^2$;
8) $-\frac{9}{64}n^6 - 3mn^5 - 16m^2n^4$.

17.10. Представьте, если это возможно, в виде квадрата двучлена или в виде выражения, противоположного квадрату двучлена, трёхчлен:

1) $-a^4 - 0{,}8a^6 - 0{,}16a^8$;
2) $121m^2 - 44mn + 16n^2$;
3) $-a^6 + 4a^3b - 4b^2$;
4) $\frac{25}{49}a^8 - 10a^4b^6 + 49b^{12}$;
5) $80xy + 16x^2 + 25y^2$;
6) $b^{10} - \frac{1}{3}b^5c + \frac{1}{9}c^2$.

17.11. Представьте в виде квадрата двучлена выражение:

1) $(4a + 3b)^2 - 8b(4a + b)$;
2) $(10x + 3y)^2 - (8x + 4y)(8x - 4y)$.

17.12. Преобразуйте в квадрат двучлена выражение:

1) $(3m - 2n)^2 + 5m(4n - m)$;
2) $(9x + 2y)^2 - (8x + 3y)(4x - 4y)$.

17.13. Пользуясь преобразованием выражений в квадрат суммы или разности двух чисел, найдите значение данного выражения:

1) $1{,}02^2 - 1{,}02 \cdot 1{,}96 + 0{,}98^2$; 2) $24^2 + 96 \cdot 38 + 76^2$.

17.14. Вычислите:

1) $203^2 - 406 \cdot 103 + 103^2$; 2) $1{,}58^2 + 1{,}58 \cdot 2{,}84 + 1{,}42^2$.

17.15. Какое число надо прибавить к многочлену $81a^2b^2 - 36ab + 9$, чтобы полученное выражение было тождественно равно квадрату двучлена?

17.16. Какое число надо прибавить к многочлену $100m^4 + 120m^2 + 40$, чтобы полученное выражение было тождественно равно квадрату двучлена?

17.17. Решите уравнение:

1) $x^2 - 16x + 64 = 0$;
2) $81x^2 + 126x + 49 = 0$;
3) $(x - 1)^2 + (x - 2)^2 = 2(1 - x)(x - 2)$.

17.18. Решите уравнение:

1) $x^2 + 12x + 36 = 0$;
2) $25x^2 - 30x + 9 = 0$;
3) $(x + 3)^2 + (4 - x)^2 = 2(x - 4)(x + 3)$.

17.19. Является ли тождеством равенство:

$(a - 2)(a - 3)(a + 3)(a + 2) + a^2 = (a^2 - 6)^2$?

17.20. Докажите тождество:

1) $(a - 1)^2 + 2(a - 1) + 1 = a^2$;
2) $(a + b)^2 - 2(a + b)(a - b) + (a - b)^2 = 4b^2$;
3) $(a - 8)^2 + 2(a - 8)(3 - a) + (a - 3)^2 = 25$;
4) $(x^n - 2)^2 - 2(x^n - 2)(x^n + 2) + (x^n + 2)^2 = 16$, где n — произвольное натуральное число.

17.21. Докажите, что значение выражения не зависит от значения переменной:

1) $(3x + 8)^2 - 2(3x + 8)(3x - 8) + (3x - 8)^2$;
2) $(4x - 7)^2 + (4x - 11)^2 + 2(4x - 7)(11 - 4x)$.

17.22. Докажите, что уравнение не имеет корней:

1) $x^2 - 14x + 52 = 0$; 2) $4x^2 - 2x + 1 = 0$.

17.23. Докажите, что уравнение не имеет корней:

1) $x^2 - 8x + 17 = 0$; 2) $x^2 - x + 1 = 0$.

◆ ◆ ◆

17.24. Докажите, что данное выражение принимает положительные значения при всех значениях x. Укажите, какое наименьшее значение принимает это выражение и при каком значении x:

1) $x^2 - 6x + 10$; 2) $16x^2 + 24x + 25$; 3) $x^2 + x + 1$.

17.25. Может ли принимать отрицательные значения выражение:

1) $x^2 - 24x + 144$; 2) $4x^2 + 20x + 28$?

17.26. Докажите, что данное выражение принимает отрицательные значения при всех значениях x. Укажите, какое наибольшее значение принимает это выражение и при каком значении x:

1) $-x^2 + 4x - 12$; 2) $22x - 121x^2 - 2$; 3) $-56 - 36x^2 - 84x$.

17.27. Может ли принимать положительные значения выражение:

1) $-x^2 + 20x - 100$; 2) $-x^2 - 10 - 4x$?

17.28. Какое наибольшее значение и при каком значении переменной принимает выражение:

1) $-x^2 - 16x + 36$; 2) $2 - 16x^2 + 24x$?

17.29. Какое наименьшее значение и при каком значении переменной принимает выражение:

1) $x^2 - 28x + 200$; 2) $9x^2 + 30x - 25$?

17.30. Представьте многочлен $\frac{81}{16}x^4 + y^8 - \frac{9}{2}x^2y^4$ в виде произведения квадратов двух двучленов.

17.31. Докажите, что выражение $(a - 3b)(a - 3b - 4) + 4$ принимает неотрицательные значения при любых значениях переменных.

17.32. Представьте в виде суммы квадратов двух выражений многочлен:

1) $2a^2 - 2a + 1$;
2) $a^2 + b^2 + 2a + 2b + 2$;
3) $x^2 + 6x + y^2 - 2y + 10$;
4) $10x^2 - 6xy + y^2$;
5) $x^2 + 5y^2 + 4xy - 4y + 4$;
6) $2a^2 + 2b^2$.

17.33. Представьте многочлен в виде суммы квадратов двух выражений:

1) $a^4 + 17a^2 + 16$;
2) $10x^2 + 2xy + y^2$;
3) $2x^2 - 6xy + 9y^2 - 6x + 9$;
4) $x^2 + y^2 - 10x + 14y + 74$.

17.34. При каких значениях x и y равно нулю значение многочлена:

1) $x^2 + y^2 + 8x - 10y + 41$;
2) $x^2 + 37y^2 + 12xy - 2y + 1$?

17.35. Существуют ли такие значения x и y, при которых равно нулю значение многочлена:

1) $x^2 + 4y^2 + 2x - 4y + 2$;
2) $9x^2 + y^2 - 12x + 8y + 21$?

17.36. Значения переменных a и b таковы, что $a + b = 7$, $ab = 2$. Найдите значение выражения $a^2 + b^2$.

17.37. Известно, что $a^2 + b^2 = 37$, $ab = 6$. Найдите значение выражения $a - b$.

17.38. Положительные значения переменных a и b таковы, что выполняются равенства $a^2 + b^2 = 34$, $ab = 15$. Найдите значение выражения $a + b$.

17.39. Отрицательные значения переменных a и b таковы, что выполняются равенства $a^2 + b^2 = 68$, $ab = 16$. Найдите значение выражения $a + b$.

17.40. Докажите, что выражение $(n^2 - 1)(m^2 - 1)$ можно представить в виде разности квадратов двух выражений.

17.41. Докажите, что произведение двух чисел, каждое из которых является суммой квадратов двух целых чисел, можно представить в виде суммы квадратов двух целых чисел.

17.42. Представьте число 24 в виде суммы таких двух чисел, чтобы их произведение было наибольшим.

17.43. Найдите стороны прямоугольника, имеющего наибольшую площадь из всех прямоугольников, периметр каждого из которых равен 20 см.

17.44. Числа a и b таковы, что $b^2 + \frac{a^2}{4} = 1$, $ab = 3$, $a > 0$, $b > 0$. Найдите значение выражения $a + 2b$.

17.45. Числа a, b и c таковы, что $a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc = 0$. Чему равно значение выражения $a + b - 2c$?

17.46. Вычислите значение выражения $a^2 + b^2 + c^2$, если $a + b + c = 7$ и $ab + bc + ac = -5$.

17.47. Известно, что $a^2 + b^2 + c^2 = 30$ и $a - b - c = 4$. Докажите, что $bc - ab - ac = -7$.

17.48. Известно, что $a^2 + b^2 + c^2 = 26$ и $ab - ac - bc = -11$. Найдите значение выражения $a + b - c$.

17.49. Разложите на множители выражение $a^2 + b^2 + 3c^2 + 2ab + 4ac + 4bc$.

17.50. Разложите на множители выражение $a^2 + 8b^2 + c^2 - 6ab - 6bc + 2ac$.

17.51. Существует ли такое натуральное число n, при котором значение выражения $2^8 + 2^{11} + 2^n$ является квадратом натурального числа?

17.52. Докажите, что значение выражения $1000^2 + 1000^2 \cdot 1001^2 + 1001^2$ является квадратом натурального числа.

17.53. Докажите, что значение выражения $999 \cdot 1001 \cdot 1003 \cdot 1005 + 16$ является квадратом натурального числа.

17.54. Докажите, что уравнение $x^4 - x + \frac{1}{2} = 0$ не имеет корней.

17.55. Докажите, что уравнение $x^4 - 4x + 5 = 0$ не имеет корней.

17.56. Найдите все натуральные значения n, при которых значение выражения $n^2 + 3n$ является квадратом натурального числа.

17.57. Натуральное число n таково, что последняя цифра значения выражения $n(n + 8)$ равна 4. Найдите предпоследнюю цифру значения этого выражения.

17.58. В первый день турист проехал 0,4 всего пути, во второй — $\frac{2}{3}$ оставшегося, а в третий — остальные 20 км. Найдите длину пути.

17.59. Общая площадь двух участков, засеянных кукурузой, равна 100 га. На первом участке собрали по 90 т зелёной массы кукурузы с 1 га, а на втором — по 80 т. Найдите площадь каждого участка, если с первого участка собрали на 2200 т больше, чем со второго.

17.60. Разложите на множители:

1) $2ab - 3ab^2$;	4) $2a - 2b + ac - bc$;
2) $8x^4 + 2x^3$;	5) $m^2 - mn - 4m + 4n$;
3) $12a^2b^2 + 6a^2b^3 + 12ab^3$;	6) $ax - ay + cy - cx - x + y$.

17.61. При некотором значении x значение выражения $3x^2 - x + 7$ равно 10. Какое значение принимает выражение $6x^2 - 2x + 7$ при этом же значении x?

17.62. (*Старинная болгарская задача.*) Семь рыбаков ловили на озере рыбу. Первый ловил рыбу ежедневно, второй — через день, третий — через 2 дня и т. д., седьмой — через 6 дней. Сегодня все рыбаки пришли на озеро. Через какое наименьшее количество дней все семь рыбаков соберутся вместе на озере?

§ 18 Сумма и разность кубов двух выражений

Умножим двучлен $a + b$ на трёхчлен $a^2 - ab + b^2$. Получим:

$$(a+b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 - \underline{a^2b} + \underline{\underline{ab^2}} + \underline{a^2b} - \underline{\underline{ab^2}} + b^3 = a^3 + b^3.$$

Тем самым мы доказали тождество

$$\boxed{a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)}$$

Это тождество называют **формулой суммы кубов двух выражений.**

Многочлен $a^2 - ab + b^2$, стоящий в правой части, называют **неполным квадратом разности**. Такое название объясняется его внешним сходством с многочленом $a^2 - 2ab + b^2$, который равен квадрату разности a и b.

Теперь можно сформулировать такое правило.

Сумма кубов двух выражений равна произведению суммы этих выражений и неполного квадрата их разности.

Разложим на множители выражение $a^3 - b^3$. Имеем:

$$a^3 - b^3 = a^3 + (-b)^3 = (a + (-b))(a^2 - a(-b) + (-b)^2) =$$
$$= (a - b)(a^2 + ab + b^2).$$

Мы доказали тождество

$$\boxed{a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)}$$

Заметим, что эту формулу также можно доказать, перемножив многочлены, стоящие в правой части.

Это тождество называют **формулой разности кубов двух выражений**.

Многочлен $a^2 + ab + b^2$ называют **неполным квадратом суммы**.

Теперь можно сформулировать такое правило.

Разность кубов двух выражений равна произведению разности этих выражений и неполного квадрата их суммы.

Пример 1. Разложите на множители:

1) $8a^3 + 27b^3$; 2) $x^6 - y^9$.

Решение. 1) Представив данный многочлен в виде суммы кубов двух выражений, получим:

$8a^3 + 27b^3 = (2a)^3 + (3b)^3 = (2a + 3b)(4a^2 - 6ab + 9b^2)$.

2) Представив данный многочлен в виде разности кубов двух выражений, получим:

$x^6 - y^9 = (x^2)^3 - (y^3)^3 = (x^2 - y^3)(x^4 + x^2y^3 + y^6)$. ■

Пример 2. Упростите выражение $(4y - 1)(16y^2 + 4y + 1)$ и найдите его значение при $y = \frac{1}{2}$.

Решение. $(4y - 1)(16y^2 + 4y + 1) = (4y)^3 - 1 = 64y^3 - 1$.

При $y = \frac{1}{2}$:

$$64y^3 - 1 = 64 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 - 1 = 64 \cdot \frac{1}{8} - 1 = 8 - 1 = 7. \ ■$$

Пример 3. Представьте в виде произведения выражение $(m - 4)^3 + 216$.

Решение. Применив формулу суммы кубов, получим:

$$(m - 4)^3 + 216 = (m - 4)^3 + 6^3 = (m - 4 + 6)((m - 4)^2 - 6(m - 4) + 36).$$

Отсюда $(m - 4 + 6)((m - 4)^2 - 6(m - 4) + 36) =$

$$= (m + 2)(m^2 - 8m + 16 - 6m + 24 + 36) = (m + 2)(m^2 - 14m + 76). \ ■$$

Пример 4. Докажите, что значение выражения $25^3 - 1$ делится нацело на 24.

Решение. Применив формулу разности кубов, получим:

$$25^3 - 1 = (25 - 1)(25^2 + 25 + 1) = 24(25^2 + 26).$$

Данное выражение представлено в виде произведения, один из множителей которого равен 24, а другой — натуральное число. Следовательно, значение этого выражения делится нацело на 24. ■

1. Какое тождество называют формулой суммы кубов?
2. Какой многочлен называют неполным квадратом разности?
3. Сформулируйте правило разложения на множители суммы кубов двух выражений.
4. Какое тождество называют формулой разности кубов?
5. Какой многочлен называют неполным квадратом суммы?
6. Сформулируйте правило разложения на множители разности кубов двух выражений.

Упражнения

18.1. Какому из данных выражений тождественно равен многочлен $a^3 - 27$:

1) $(a - 3)(a^2 + 6a + 9)$;
2) $(a - 3)(a^2 - 9)$;
3) $(a - 3)(a^2 - 3a + 9)$;
4) $(a - 3)(a^2 + 3a + 9)$?

18.2. Какое из данных равенств является тождеством:

1) $m^3 + 8n^6 = (m + 2n^2)(m^2 + 2mn^2 + 4n^4)$;
2) $m^3 + 8n^6 = (m - 2n^2)(m^2 + 2mn^2 + 4n^4)$;
3) $m^3 + 8n^6 = (m + 2n^2)(m^2 - 2mn^2 + 4n^4)$;
4) $m^3 + 8n^6 = (m - 2n^2)(m^2 - 2mn^2 + 4n^4)$?

18.3. Разложите на множители:

1) $a^3 + 8$;
2) $c^3 - 64$;
3) $125 - b^3$;
4) $1 + x^3$;
5) $a^3 + 1000$;
6) $27a^3 - 1$;
7) $1000c^3 - 216$;
8) $a^3b^3 - 1$;
9) $m^3n^3 + 0{,}001$;
10) $\frac{64}{343}m^3 - \frac{125}{216}n^3$;
11) $8m^6 + 27n^9$;
12) $m^6n^3 - p^{12}$;
13) $0{,}027x^{21} + 0{,}125y^{24}$;
14) $0{,}216 - 8c^{27}$;
15) $1000a^{12}b^3 + 0{,}001c^6d^{15}$.

18.4. Разложите на множители:

1) $x^3 - 1$;
2) $27 + a^3$;
3) $216 - y^3$;
4) $\frac{1}{8}a^3 + b^3$;
5) $a^6 - 8$;
6) $a^3b^3 - c^3$;
7) $a^3 - b^{15}c^{18}$;
8) $125c^3d^3 + 0{,}008b^3$;
9) $\frac{64}{729}x^3 - \frac{27}{1000}y^6$.

18.5. Представьте в виде многочлена выражение:

1) $(x - 2)(x^2 + 2x + 4)$;
2) $(2a - 1)(4a^2 + 2a + 1)$;
3) $(a^2 + 1)(a^4 - a^2 + 1)$;
4) $(0{,}5xy + 2)(0{,}25x^2y^2 - xy + 4)$.

18.6. Выполните умножение:

1) $(b - 4)(b^2 + 4b + 16)$;
2) $(2a + 3b)(4a^2 - 6ab + 9b^2)$;
3) $(x^3 + 6y^2)(x^6 - 6x^3y^2 + 36y^4)$;
4) $\left(\frac{1}{4}a - \frac{1}{5}b\right)\left(\frac{1}{16}a^2 + \frac{1}{20}ab + \frac{1}{25}b^2\right)$.

18.7. Упростите выражение и найдите его значение:

1) $(9a^2 + 3a + 1)(3a - 1)$, если $a = \frac{1}{3}$;
2) $(5y - 2)(25y^2 + 10y + 4) + 8$, если $y = -\frac{1}{5}$.

18.8. Найдите значение выражения:

1) $(1 - b^2)(1 + b^2 + b^4)$, если $b = -2$;
2) $2x^3 + 7 - (x + 1)(x^2 - x + 1)$, если $x = -1$.

◆ ◆

18.9. Разложите на множители:

1) $(a + 6)^3 - 27$;
2) $(2x - 1)^3 + 64$;
3) $8a^6 - (4a - 3)^3$;
4) $1000 + (y - 10)^3$;
5) $(x + y)^3 - (x - y)^3$;
6) $(a - 2)^3 + (a + 2)^3$.

18.10. Представьте в виде произведения выражение:

1) $(b - 5)^3 + 125$;
2) $(4 - 3x)^3 - 8x^3$;
3) $(a - b)^3 + (a + b)^3$;
4) $(x + 3)^3 - (c - 3)^3$.

18.11. Упростите выражение:

1) $(x + 1)(x^2 - x + 1) + (2 - x)(4 + 2x + x^2)$;
2) $(x - 4)(x^2 + 4x + 16) - x(x - 5)(x + 5)$;
3) $a(a - 3)^2 - (a + 3)(a^2 - 3a + 9)$;
4) $(a - 1)(a + 1)(a^2 - a + 1)(a^2 + a + 1)(a^6 + 1)(a^{12} + 1)$.

18.12. Упростите выражение:

1) $(a - 5)(a^2 + 5a + 25) - (a - 1)(a^2 + a + 1)$;
2) $(y - 3)(y^2 + 3y + 9) - y(y - 3)(y + 3) - (y + 3)^2$;
3) $(a - b)(a + b)(a^4 + a^2b^2 + b^4)$.

18.13. Поставьте вместо звёздочек такие одночлены, чтобы выполнялось тождество:

1) $(7k - p)(* + * + *) = 343k^3 - p^3$;
2) $(* + *)(25a^4 - * + 36b^2) = 125a^6 + 216b^3$;
3) $(mn + *)(* - * + k^6) = m^3n^3 + k^9$.

18.14. Решите уравнение:

1) $(x - 1)(x^2 + x + 1) + x^2 = x^2(x + 1) - 2x$;
2) $(3x - 1)(9x^2 + 3x + 1) - 9x(3x^2 - 4) = 17$;
3) $(x + 4)(x^2 - 4x + 16) - x(x - 7)(x + 7) = 15$;
4) $(x + 6)(x^2 - 6x + 36) - x(x - 9)^2 = 4x(4{,}5x - 13{,}5)$.

18.15. Решите уравнение:

1) $(x + 2)(x^2 - 2x + 4) + 3x^2 = x^2(x + 3) - 2x$;
2) $(7 - 2x)(49 + 14x + 4x^2) + 2x(2x - 5)(2x + 5) = 43$;
3) $100(0{,}2x + 1)(0{,}04x^2 - 0{,}2x + 1) = 5x(0{,}16x^2 - 4)$.

18.16. Докажите, что значение выражения:

1) $456^3 - 156^3$ делится нацело на 300;
2) $254^3 + 238^3$ делится нацело на 123;
3) $17^6 - 1$ делится нацело на 36.

18.17. Докажите, что значение выражения:

1) $341^3 + 109^3$ делится нацело на 90;
2) $2^{15} + 3^3$ делится нацело на 35.

◆ ◆ ◆

18.18. Укажите наименьшее натуральное значение n такое, чтобы выражение $x^{2n} - y^{3n}$ можно было разложить на множители как по формуле разности квадратов, так и по формуле разности кубов. Разложите полученный многочлен на множители по этим формулам.

18.19. Придумайте многочлен, который можно разложить на множители как по формуле разности квадратов, так и по формуле разности кубов. Разложите придуманный многочлен на множители по этим формулам.

18.20. Можно ли утверждать, что если сумма двух натуральных чисел делится нацело на некоторое натуральное число, то на это число делится нацело:

1) разность их квадратов;
2) сумма их квадратов;
3) сумма их кубов?

18.21. Докажите, что сумма кубов двух последовательных нечётных натуральных чисел делится нацело на 4.

18.22. Докажите, что сумма кубов двух последовательных натуральных чисел, ни одно из которых не кратно 3, делится нацело на 9.

18.23. Известно, что числа x и y таковы, что $x^2 + y^2 = 1$. Найдите значение выражения $x^6 + 3x^2y^2 + y^6$.

18.24. Известно, что числа x и y таковы, что $x^3 - y^2 = 2$. Найдите значение выражения $x^9 - 6x^3y^2 - y^6$.

18.25. Докажите, что если $2a - b = 1$, то $8a^3 - b^3 = 6ab + 1$.

18.26. Докажите, что если $a + 3b = 2$, то $a^3 + 27b^3 = 8 - 18ab$.

18.27. Докажите, что если $a + b + c = 0$, то $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$.

18.28. Используя результат задачи 18.27, разложите на множители выражение $(a - b)^3 + (b - c)^3 + (c - a)^3$.

Упражнения для повторения

18.29. В одном ящике было на 12 кг яблок больше, чем в другом. Когда из первого ящика переложили во второй 4 кг яблок, то оказалось, что масса яблок во втором ящике составила $\frac{5}{7}$ массы яблок в первом. Сколько килограммов яблок было в каждом ящике сначала?

18.30. Какая последняя цифра значения выражения $3^{16} + 7^{16}$?

18.31. Найдите значение каждого из следующих выражений при $a = 1$ и $a = -1$:

1) $a + a^2 + a^3 + a^4 + \ldots + a^{99} + a^{100}$;
2) $a + a^2 + a^3 + a^4 + \ldots + a^{98} + a^{99}$;
3) $aa^2a^3a^4\ldots a^{99}a^{100}$;
4) $aa^2a^3a^4\ldots a^{98}a^{99}$.

§ 19 Куб суммы и куб разности двух выражений

Преобразуем в многочлен выражение $(a + b)^3$. Имеем:

$$(a + b)^3 = (a + b)^2(a + b) = (a^2 + 2ab + b^2)(a + b) =$$
$$= a^3 + a^2b + 2a^2b + 2ab^2 + b^2a + b^3 =$$
$$= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.$$

$$\boxed{(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3}$$

Это тождество называют **формулой куба суммы двух выражений.** Теперь можно сформулировать такое правило.

Куб суммы двух выражений равен кубу первого выражения плюс утроенное произведение квадрата первого выражения и второго выражения плюс утроенное произведение первого выражения и квадрата второго выражения плюс куб второго выражения.

Преобразуем в многочлен выражение $(a - b)^3$. Имеем:

$$(a-b)^3 = (a-b)^2(a-b) = (a^2 - 2ab + b^2)(a-b) =$$
$$= a^3 - a^2b - 2a^2b + 2ab^2 + b^2a - b^2 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3.$$

Мы получили **формулу куба разности двух выражений:**

$$\boxed{(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3}$$

Теперь можно сформулировать такое правило.

Куб разности двух выражений равен кубу первого выражения минус утроенное произведение квадрата первого выражения и второго выражения плюс утроенное произведение первого выражения и квадрата второго выражения минус куб второго выражения.

Заметим, что формулу куба разности двух выражений можно получить с помощью формулы куба суммы двух выражений:

$$(a-b)^3 = (a + (-b))^3 = a^3 + 3a^2(-b) + 3a(-b)^2 + (-b)^3 =$$
$$= a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3.$$

С помощью полученных формул можно проще возводить в куб сумму либо разность любых двух выражений, не используя правило умножения многочленов. Поэтому их относят к формулам сокращённого умножения.

Запишем формулы куба суммы и куба разности двух выражений, поменяв местами их левые и правые части:

$$\boxed{\begin{aligned} a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 &= (a+b)^3 \\ a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 &= (a-b)^3 \end{aligned}}$$

В таком виде эти формулы позволяют в ряде случаев «свернуть» многочлен в куб двучлена.

Пример 1. Представьте в виде многочлена выражение:

1) $(2x + 3)^3$; 2) $(m^2 - 2n)^3$.

Решение. 1) По формуле куба суммы двух выражений получаем:

$(2x + 3)^3 = (2x)^3 + 3 \cdot (2x)^2 \cdot 3 + 3 \cdot 2x \cdot 3^2 + 3^3 = 8x^3 + 36x^2 + 54x + 27.$

2) По формуле куба разности двух выражений получаем:

$(m^2 - 2n)^3 = (m^2)^3 - 3 \cdot (m^2)^2 \cdot 2n + 3 \cdot m^2 \cdot (2n)^2 - (2n)^3 = m^6 - 6m^4n + 12m^2n^2 - 8n^3$. ■

Пример 2. Числа x и y таковы, что $x^3 + y^3 = 65$, $x^2y + xy^2 = 20$. Найдите значение выражения $x + y$.

Решение. Имеем: $3x^2y + 3xy^2 = 60$. С учётом того, что $x^3 + y^3 = 65$, получаем $3x^2y + 3xy^2 + x^3 + y^3 = 60 + 65$. Отсюда $(x + y)^3 = 125$. Тогда $x + y = 5$. ■

Пример 3. Разложите на множители многочлен $2x^3 + 3x^2 + 3x + 1$.

Решение. Имеем: $2x^3 + 3x^2 + 3x + 1 = x^3 + x^3 + 3x^2 + 3x + 1 =$

$$= x^3 + (x + 1)^3 = (x + x + 1)(x^2 - x(x + 1) + (x + 1)^2) =$$
$$= (2x + 1)(x^2 - x^2 - x + x^2 + 2x + 1) =$$
$$= (2x + 1)(x^2 + x + 1). \blacksquare$$

?

1. Какое тождество называют формулой куба суммы двух выражений?

2. Сформулируйте правило возведения в куб суммы двух выражений.

3. Какое тождество называют формулой куба разности двух выражений?

4. Сформулируйте правило возведения в куб разности двух выражений.

Упражнения

19.1. Какому из данных многочленов тождественно равно выражение $(a + 2b)^3$:

1) $a^3 + 8b^3$;
2) $a^3 + 3a^2b + 12ab^2 + 8b^3$;
3) $a^3 + 6a^2b + 12ab^2 + 8b^3$;
4) $a^3 + 6a^3b + 3ab^2 + 8b^3$?

19.2. Какое из данных равенств является тождеством:

1) $(3x - 1)^3 = 27x^3 - 1$;
2) $(3x - 1)^3 = 27x^3 + 1$;
3) $(3x - 1)^3 = 27x^3 - 27x^2 + 9x + 1$;
4) $(3x - 1)^3 = 27x^3 - 27x^2 + 9x - 1$?

19.3. Представьте в виде многочлена выражение:

1) $(a + 1)^3$;
2) $(m - 3)^3$;
3) $(a + 2b)^3$;
4) $(3 - n)^3$;
5) $(-2 + 3x)^3$;
6) $(-3 - 2y)^3$.

19.4. Представьте в виде многочлена выражение:

1) $(b + 2)^3$;
2) $(c - 1)^3$;
3) $(3b + c)^3$;
4) $\left(a - \frac{2}{3}\right)^3$;
5) $(-3 + y)^3$;
6) $\left(-4 - \frac{1}{3}m\right)^3$.

19.5. Выполните возведение в куб:

1) $(2x^2 - y^3)^3$;
2) $(xn + y^{2n})^3$;
3) $(2^{n+1} - 3m)^3$,

где m и n — натуральные числа.

19.6. Выполните возведение в куб:

1) $(3x^4 + 2y^2)^3$;
2) $(a^{2m} - b^{3n})^3$;
3) $(3n + 4^{m-1})^3$,

где m и n — натуральные числа.

19.7. Замените звёздочки такими одночленами, чтобы образовалось тождество:

1) $(x + *)^3 = * + 21x^2 + * + *$;
2) $(* - 2a)^3 = 27m^6 - * + * - *$.

19.8. Замените звёздочки такими одночленами, чтобы образовалось тождество:

1) $(* + y)^3 = * + * + 12y^2 + *$;
2) $(3b - *)^3 = * - * + * - 64a^3$.

19.9. Докажите тождество:

1) $(x + y)^3 - x^3 - y^3 = 3xy(x + y)$;
2) $(3x + 1)^3 - 9x(3x + 1) = 27x^3 + 1$;
3) $(2 + y^2)^3 - 4(2 + 3y^2) = y^4(6 + y^2)$;
4) $(2^n - 3^n)^3 - 8^n + 27 = -3 \cdot 6^n(2^n - 3^n)$, где n — натуральное число.

19.10. Докажите тождество:

1) $x^3 - y^3 - (x - y)^3 = 3xy(x - y)$;
2) $(6x - 1)^3 - 216x^3 + 1 = 18x(1 - 6x)$;
3) $(b^2 + 3)^3 - 27(b^2 + 1) = b^4(b^2 + 9)$;
4) $(3^n - 2)^3 - 27^n + 8 = 2 \cdot 3^{n+1}(2 - 3^n)$, где n — натуральное число.

19.11. Решите уравнение:

1) $x^3 - 6x^2 + 12x - 8 = 0$;
2) $216x^3 + 108x^2 + 18x + 1 = 0$;
3) $27x^3 + 54x^2 + 36x + 8 = 0$.

19.12. Решите уравнение:

1) $x^3 + 9x^2 + 27x + 27 = 0$;
2) $125x^3 - 75x^2 + 15x - 1 = 0$;
3) $64x^3 + 144x^2 + 108x + 27 = 0$.

19.13. Докажите, что при любом натуральном n значение выражения $(2n - 1)^3 - 4n^2 + 2n + 1$ делится нацело на 16.

19.14. Разложите на множители многочлен:

1) $x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + 2y^3$; 2) $7a^3 - 12a^2 + 6a - 1$.

19.15. Разложите на множители многочлен:

1) $28a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$; 2) $63x^3 + 48x^2 + 12x + 1$.

19.16. Числа x и y таковы, что $x^3 - y^3 = 7$, $x^2y - xy^2 = 2$. Найдите значение выражения $x - y$.

19.17. Числа x и y таковы, что $x(y^2 + 3x^2) = 26$, $y(y^2 + 27x^2) = 109$. Найдите значение выражения $3x - y$.

19.18. Числа x и y таковы, что $x(x^2 + 12y^2) = 32$, $y(4y^2 + 3x^2) = 16$. Найдите значение выражения $x + 2y$.

19.19. Докажите, что значение выражения $1002 \cdot 1004^3 - 1003 \cdot 1001^3$ является кубом натурального числа.

Упражнения для повторения

19.20. В ящике лежат 36 карточек, пронумерованных числами от 1 до 36. Какова вероятность того, что номер наугад выбранной карточки будет кратным числу 9?

19.21. Объём бака автомобиля составляет 40 л, а расход топлива на каждые 100 км — 10 л. Какое наименьшее количество раз водителю придётся заправить топливом автомобиль, если ему необходимо проехать 1300 км, а бак в момент начала движения заполнен наполовину?

19.22. Известно, что $2a + b = k$. Чему равно значение выражения $4a^2 - b^2 + k(b - 2a)$?

19.23. Десять автобусных остановок расположены на прямой улице так, что расстояния между любыми соседними остановками одинаковы. Расстояние между первой и третьей остановками составляет 1,2 км. Каково расстояние между первой и последней остановками?

19.24. Расставьте числа 2^1, 2^2, 2^3, ..., 2^9 в клетках квадратной таблицы 3×3 так, чтобы произведения чисел, стоящих в каждой строке, в каждом столбце и на каждой диагонали, были равны.

§ 20 Применение различных способов разложения многочлена на множители

В предыдущих параграфах мы рассмотрели такие способы разложения многочлена на множители:

- вынесение общего множителя за скобки;
- метод группировки;
- применение формул сокращённого умножения.

Однако в математике при решении многих задач часто приходится использовать несколько приёмов, применяя их в некоторой последовательности. В частности, есть целый ряд многочленов, для разложения которых на множители надо применить несколько способов.

Возникает естественный вопрос: какие способы и в какой последовательности надо применять при разложении многочлена на множители? Универсальных рекомендаций не существует, всё зависит от конкретного многочлена. И всё же дадим несколько общих советов:

1) если это возможно, то разложение надо начинать с вынесения общего множителя за скобки;

2) проверить, можно ли применить формулы сокращённого умножения;

3) если не удаётся применить формулы сокращённого умножения, попробовать воспользоваться методом группировки.

Пример 1. Разложите на множители многочлен:

1) $3a^2b - 12b$;
3) $24m^4 + 3m$;
2) $-5x^2 + 30xy - 45y^2$;
4) $3a^3 + 21a^2 - 6a^2b - 42ab$.

Решение. 1) Применив последовательно вынесение общего множителя за скобки и формулу разности квадратов, получим:

$$3a^2b - 12b = 3b(a^2 - 4) = 3b(a - 2)(a + 2).$$

2) Применив последовательно вынесение общего множителя за скобки и формулу квадрата разности, получим:

$$-5x^2 + 30xy - 45y^2 = -5(x^2 - 6xy + 9y^2) = -5(x - 3y)^2.$$

3) Вынесем общий множитель за скобки и применим формулу суммы кубов:

$$24m^4 + 3m = 3m(8m^3 + 1) = 3m(2m + 1)(4m^2 - 2m + 1).$$

4) Комбинируя метод вынесения общего множителя за скобки и метод группировки, получим:

$$3a^3 + 21a^2 - 6a^2b - 42ab = 3a(a^2 + 7a - 2ab - 14b) =$$
$$= 3a((a^2 + 7a) + (-2ab - 14b)) = 3a(a(a + 7) - 2b(a + 7)) =$$
$$= 3a(a + 7)(a - 2b).$$ ■

Пример 2. Представьте в виде произведения многочленов:

1) $x^{16} - 1$; 2) $a^{12} - b^{12}$.

Решение. 1) $x^{16} - 1 = (x^8 - 1)(x^8 + 1) = (x^4 - 1)(x^4 + 1)(x^8 + 1) =$
$= (x^2 - 1)(x^2 + 1)(x^4 + 1)(x^8 + 1) = (x - 1)(x + 1)(x^2 + 1)(x^4 + 1)(x^8 + 1)$.

2) $a^{12} - b^{12} = (a^6 - b^6)(a^6 + b^6) = (a^3 - b^3)(a^3 + b^3)(a^6 + b^6)$.

Мы получили три множителя, один из которых является разностью кубов, а два других — суммой кубов. Используя соответствующие формулы, получим:

$a^{12} - b^{12} = (a - b)(a^2 + ab + b^2)(a + b)(a^2 - ab + b^2)(a^2 + b^2)(a^4 - a^2b^2 + b^4)$. ■

Пример 3. Разложите на множители:

1) $m^2 - 16n^2 + 2m - 8n$; 2) $x^2 + 4xy + 4y^2 - 16$.

Решение. 1) $m^2 - 16n^2 + 2m - 8n = (m^2 - 16n^2) + (2m - 8n) =$
$= (m - 4n)(m + 4n) + 2(m - 4n) = (m - 4n)(m + 4n + 2)$.

2) $x^2 + 4xy + 4y^2 - 16 = (x^2 + 4xy + 4y^2) - 16 = (x + 2y)^2 - 16 = (x + 2y - 4)(x + 2y + 4)$. ■

Пример 4. Решите уравнение $x^3 + x^2 - 4x - 4 = 0$.

Решение.

$$x^2(x + 1) - 4(x + 1) = 0;$$
$$(x + 1)(x^2 - 4) = 0;$$
$$(x + 1)(x - 2)(x + 2) = 0;$$
$$x + 1 = 0, \text{ или } x - 2 = 0, \text{ или } x + 2 = 0;$$
$$x = -1, \text{ или } x = 2, \text{ или } x = -2.$$

Ответ: -2; -1; 2. ■

Пример 5. Разложите на множители трёхчлен $x^2 + 8x - 9$, выделив предварительно квадрат двучлена.

Решение. Если к сумме $x^2 + 8x$ прибавить число 16, то полученное выражение $x^2 + 8x + 16$ можно «свернуть» по формуле квадрата суммы. Поэтому, прибавив к данному трёхчлену число 16 и вычтя из него 16, получим:

$$x^2 + 8x - 9 = x^2 + 8x + 16 - 16 - 9 = (x + 4)^2 - 25 =$$
$$= (x + 4 - 5)(x + 4 + 5) = (x - 1)(x + 9). \blacksquare$$

Пример 6. Разложите на множители многочлен $x^4 + 4y^4$.

Решение. Так как $x^4 = (x^2)^2$, $4y^4 = (2y^2)^2$, то, прибавляя к данному многочлену $4x^2y^2$ (удвоенное произведение одночленов x^2 и $2y^2$) и вычитая из него такой же одночлен, получим:

$$x^4 + 4y^4 = x^4 + 4x^2y^2 + 4y^4 - 4x^2y^2 = (x^2 + 2y^2)^2 - 4x^2y^2 =$$
$$= (x^2 + 2y^2 - 2xy)(x^2 + 2y^2 + 2xy). \blacksquare$$

Пример 7. Разложите на множители трёхчлен $a^5 + a + 1$.

Решение.

I способ.

$$a^5 + a + 1 = a^5 + a^4 - a^4 + a^3 - a^3 + a^2 - a^2 + a + 1 =$$
$$= a^5 + a^4 + a^3 - a^4 - a^3 - a^2 + a^2 + a + 1 =$$
$$= a^3(a^2 + a + 1) - a^2(a^2 + a + 1) + a^2 + a + 1 =$$
$$= (a^2 + a + 1)(a^3 - a^2 + 1).$$

II способ.

$$a^5 + a + 1 = a^5 - a^2 + a^2 + a + 1 = a^2(a^3 - 1) + (a^2 + a + 1) =$$
$$= a^2(a - 1)(a^2 + a + 1) + (a^2 + a + 1) = (a^2 + a + 1)(a^3 - a^2 + 1). \blacksquare$$

Упражнения

20.1. Разложите на множители многочлен:

1) $2a^2 - 2b^2$; 4) $3ab^2 - 27a$; 7) $x^4 - x^2$;
2) $cx^2 - cy^2$; 5) $x^3 - 4x$; 8) $0{,}09t^4 - t^6$;
3) $3x^2 - 3$; 6) $2y^3 - 18y$; 9) $\frac{16}{49}a^2b^4c^5 - b^2c^3$.

20.2. Представьте в виде произведения многочлен:

1) $12b^2 - 12c^2$; 3) $5a^2 - 20$; 5) $7y^3 - 7y$;
2) $2a^2c - 2b^2c$; 4) $3mn^2 - 48m$; 6) $a^3 - a^5$.

20.3. Разложите на множители:

1) $3a^2 + 6ab + 3b^2$; 4) $-7b^2 - 14bc - 7c^2$;
2) $5m^2 + 5n^2 - 10mn$; 5) $x^2y + 14xy^2 + 49y^3$;
3) $-3x^2 + 12x - 12$; 6) $-8a^3b + 56a^2b^2 - 98ab^3$.

20.4. Разложите на множители:

1) $8x^2 + 16xy + 8y^2$; 3) $-12b^3 - 12b^2 - 3b$;
2) $-2a^2 + 24ab - 72b^2$; 4) $48m^3n - 72m^2n + 27mn$.

20.5. Представьте в виде произведения многочлен:

1) $a^4 - b^4$; 2) $c^4 - 81$.

20.6. Разложите на множители:

1) $x^4 - 16$; 2) $y^8 - 1$.

20.7. Разложите на множители:

1) $4a^3 - 4b^3$; 3) $7 + 7b^3$; 5) $2a^4 - 250a$;
2) $2m^3 - 16$; 4) $-x^4 + 27x$; 6) $9a^5 - 9a^2$.

20.8. Представьте в виде произведения многочлен:

1) $3x^3 + 3y^3$; 2) $5m^4 - 320mn^3$; 3) $6c^5 - 6c^8$.

20.9. Разложите на множители:

1) $a^7 + ab^6$; 2) $x^8 - y^8$; 3) $c^6 - 1$.

20.10. Разложите на множители:

1) $c^6 + c^9$; 2) $m^9 - n^9$; 3) $a^8 - b^4$.

20.11. Представьте в виде произведения многочлен:

1) $3ab + 15b - 3a - 15$; 5) $a^3 + a^2 - a - 1$;
2) $84 - 42y - 7xy + 14x$; 6) $2x^3 - 2xy^2 - 8x^2 + 8y^2$;
3) $abc + 6ac + 8ab + 48a$; 7) $5a^2 - 5b^2 - 15a^3b + 15ab^3$;
4) $m^3 - m^2n + m^2 - mn$; 8) $a^2b^2 - 1 - b^2 + a^2$.

20.12. Разложите на множители:

1) $15cx + 2cy - cxy - 30c$; 3) $x^3 + x^2y + x^2 + xy$;
2) $35a^2 - 42ab + 10a^2b - 12ab^2$; 4) $mn^4 - n^4 + mn^3 - n^3$.

◆◆

20.13. Разложите на множители:

1) $(a^2 + b^2)^2 - 4a^2b^2$; 5) $9a^2 + c^2 + 6ac - 9$;
2) $81 - (x^2 + 6x)^2$; 6) $a^2 - b^2 - 10b - 25$;
3) $a^2 + 2ab + b^2 - c^2$; 7) $49 - y^2 + x^2 - 14x$;
4) $c^2 + 4c + 4 - k^2$; 8) $mn^2 - m^3 - 12m^2 - 36m$.

20.14. Представьте в виде произведения выражение:

1) $(m^2 - 2m)^2 - 1$; 4) $64x^2 + 48xy + 9y^2 - 144$;
2) $16 - (m^2 + 4m)^2$; 5) $c^2 - a^2 + 22a - 121$;
3) $x^2 - 18xy + 81y^2 - z^2$; 6) $100 - 25y^2 - 60x^2y - 36x^4$.

20.15. Разложите на множители:

1) $a^2 - b^2 - a - b$; 6) $a^2 - 10a + 25 - ab + 5b$;
2) $x - y - x^2 + y^2$; 7) $8mp + 8np - m^2 - 2mn - n^2$;
3) $4m^2 - 9n^2 + 2m + 3n$; 8) $a^3 + b^3 - a^2b - ab^2$;
4) $c^2 - d^2 + 4c - 4d$; 9) $m^3 - 8n^3 - m^2 + 4mn - 4n^2$;
5) $5x^2y - 5xy^2 - x^2 + y^2$; 10) $a^3 - 4a^2 + 4a - 1$.

20.16. Разложите на множители:

1) $m^2 - n^2 - m + n$;
2) $c + d - c^2 + d^2$;
3) $16x^2 - 25y^2 - 4x - 5y$;
4) $12a^2b^3 + 3a^3b^2 + 16b^2 - a^2$;
5) $49c^2 - 14c + 1 - 21ab + 3a$;
6) $ax^2 + ay^2 + x^4 + 2x^2y^2 + y^4$;
7) $27c^3 - d^3 + 9c^2 + 3cd + d^2$;
8) $b^3 - 2b^2 - 2b + 1$.

20.17. Разложите на множители:

1) $x^2(x - 2) - 18x(x - 2) + 81(x - 2)$;
2) $4x(y^2 - 9) + 4x^2(y^2 - 9) - 9 + y^2$;
3) $b^2(a + 1) - a^2(b + 1)$;
4) $(a - b)(b^2 - c^2) - (b - c)(a^2 - b^2)$.

20.18. Представьте в виде произведения выражение:

1) $x^2(x + 4) - 20x(x + 4) + 100(x + 4)$;
2) $a^2 - 36 - 2a(36 - a^2) - a^2(36 - a^2)$;
3) $a^2(b - 1) - b^2(a - 1)$;
4) $(m - n)(n^3 - p^3) - (n - p)(m^3 - n^3)$.

20.19. Решите уравнение:

1) $x^3 - 4x = 0$;
2) $x^4 - x^2 = 0$;
3) $x^5 - 36x^3 = 0$;
4) $9x^3 - x = 0$;
5) $x^3 - 10x^2 + 25x = 0$;
6) $x^3 + 2x^2 - 9x - 18 = 0$;
7) $x^3 - 5x^2 + 4x - 20 = 0$;
8) $x^5 - x^4 - x + 1 = 0$.

20.20. Решите уравнение:

1) $x^3 - x = 0$;
2) $x^4 + x^2 = 0$;
3) $x^4 - 8x^3 = 0$;
4) $49x^3 + 14x^2 + x = 0$;
5) $x^3 + x^2 - x - 1 = 0$;
6) $x^3 - 4x^2 - 25x + 100 = 0$.

20.21. Является ли тождеством равенство:

1) $(a - 1)^3 - 9(a - 1) = (a - 1)(a - 4)(a + 2)$;
2) $(x^2 + 1)^2 - 4x^2 = (x - 1)^2(x + 1)^2$?

20.22. Докажите тождество:

1) $(a + 2)^3 - 25(a + 2) = (a + 2)(a + 7)(a - 3)$;
2) $a^2 + 2ab + b^2 - c^2 + 2cd - d^2 = (a + b + c - d)(a + b - c + d)$.

20.23. Разложите выражение на множители двумя способами:

а) примените формулу разности квадратов;
б) раскройте скобки и примените метод группировки:

1) $(ab + 1)^2 - (a + b)^2$;
2) $(a + 2b)^2 - (ab + 2)^2$.

◆ ◆ ◆

20.24. Докажите тождество:

1) $(a + b + c)^3 - a^3 - b^3 - c^3 = 3(a + b)(b + c)(a + c)$;
2) $(a - b)^3 + (b - c)^3 - (a - c)^3 = -3(a - b)(b - c)(a - c)$.

20.25. Разложите на множители выражение:

1) $(x - y)(x + y) + 2(x + 3y) - 8$;
2) $(2a - 3b)(2a + 3b) - 4(a + 3b) - 3$.

20.26. Представьте в виде произведения выражение:

1) $(5x - y^2)(5x + y^2) - 2(15x - 7y^2) - 40$;

2) $(3m - 2n)(12m + 5n) + 3m(3n + 4) - 2(3n^2 - 20n - 12)$.

20.27. Разложите на множители трёхчлен, выделив предварительно квадрат двучлена:

1) $x^2 - 10x + 24$;
2) $a^2 + 4a - 32$;
3) $b^2 - 3b - 4$;
4) $4a^2 - 12a + 5$;
5) $9x^2 - 24xy + 7y^2$;
6) $36m^2 - 60mn + 21n^2$.

20.28. Разложите на множители многочлен:

1) $x^2 - 4x + 3$;
2) $a^2 + 2a - 24$;
3) $y^2 + 12y + 35$;
4) $x^2 + x - 6$;
5) $c^2 + 8cd + 15d^2$;
6) $9x^2 - 30xy + 16y^2$.

20.29. Значения переменных x_1 и x_2 таковы, что выполняются равенства $x_1 - x_2 = 8$, $x_1x_2 = 5$. Найдите значение выражения:

1) $x_1x_2^2 - x_1^2x_2$;
2) $x_1^2 + x_2^2$;
3) $(x_1 + x_2)^2$;
4) $x_1^3 - x_2^3$.

20.30. Значения переменных x и y таковы, что выполняются равенства $x + y = 6$, $xy = -3$. Найдите значение выражения:

1) $x^3y^2 + x^2y^3$;
2) $(x - y)^2$;
3) $x^4 + y^4$.

20.31. Разложите на множители:

1) $x^4 + 4x^3 + 4x^2 - 9$;
2) $y^8 - y^4 + 4y^2 - 4$;
3) $(x + 2y)(x + 2y + 2) - (y - 1)(y + 1)$.

20.32. Разложите на множители:

1) $x^4 + 8x^3 + 16x^2 - 25$;
2) $(a + 3b)(a + 3b - 6) - (b + 3)(b - 3)$.

20.33. О положительных числах a и b известно, что $a^2 + b = b^2 + a$. Верно ли, что $a = b$?

20.34. Разложите на множители многочлен:

1) $x^2 + 2x - 9y^2 + 12y - 3$;
2) $x^2 - 4y^2 + 4x + 4y + 3$;
3) $a^2b^2 + 2ab - c^2 - 8c - 15$;
4) $8a^2 - 12a + 2ab - b^2 + 4$.

20.35. Разложите на множители:

1) $x^2 + 2x - y^2 + 4y - 3$;
2) $x^4y^2 + 2x^2y - x^2 + 6x - 8$;
3) $3x^2 - 4xy + y^2 + 4x - 4$.

20.36. Разложите на множители:

1) $a^3 + 2a^2 - 3$;
2) $b^3 + b^2 + 4$;
3) $x^3 - 7x - 6$;
4) $a^3 - 2ab^2 - b^3$;
5) $m^5 + m^4 + 1$;
6) $x^8 + x^4 - 2$.

20.37. Разложите на множители:

1) $x^3 - 3x + 2$;
2) $x^3 - 3x^2 + 2$;
3) $x^3 + x^2 + 18$;
4) $a^3 - 3ab^2 - 2b^3$;
5) $x^8 + x^7 + 1$;
6) $x^4 - 7x^2 - 18$.

20.38. Разложите на множители:

1) $x^4 - 5x^2 + 4$;
2) $x^4 + x^2 + 1$;
3) $4x^4 - 12x^2 + 1$;
4) $x^4 + 9x^2 + 18$;
5) $x^4 + 4$.

20.39. Представьте в виде произведения выражение:

1) $x^4 + 5x^2 + 9$;
2) $x^4 - 8x^2 + 4$;
3) $n^4 + 64$.

20.40. Докажите, что при любом натуральном значении n, отличном от 1, значение выражения $n^8 + n^4 + 1$ является составным числом.

20.41. Докажите, что значение выражения $2^{10} + 5^{12}$ является составным числом.

Упражнения для повторения

20.42. Даны три числа, из которых каждое следующее на 4 больше предыдущего. Найдите эти числа, если произведение меньшего и большего из них на 88 меньше произведения большего и среднего.

20.43. Петя сначала поднялся на гору со скоростью 2,5 км/ч, а потом спустился по другой дороге со скоростью 4 км/ч. Найдите общий путь, пройденный Петей, если дорога на гору на 3 км короче дороги с горы, а время, потраченное на весь путь, составляет 4 ч.

20.44. Решите уравнение:

1) $|7x - 3| = 4$;
2) $||x| - 10| = 8$;
3) $4(x - 2) + 5|x| = 10$;
4) $|x| = 3x - 8$.

20.45. Докажите, что сумма трёхзначного числа и удвоенной суммы его цифр делится нацело на 3.

§ 21 Формулы для разложения на множители выражений вида $a^n - b^n$ и $a^n + b^n$

Вам хорошо знакомы следующие две формулы:

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b), \tag{1}$$

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2). \tag{2}$$

Разложим на множители двучлен $a^4 - b^4$. Имеем:

$a^4 - b^4 = (a^2 - b^2)(a^2 + b^2) = (a - b)(a + b)(a^2 + b^2) = (a - b)(a^3 + a^2b + ab^2 + b^3)$.

Следовательно,

$$a^4 - b^4 = (a - b)(a^3 + a^2b + ab^2 + b^3). \tag{3}$$

В структуре формул (1) – (3) можно заметить определённую закономерность: если степени одночленов в левой части формулы равны n, то правая часть — произведение двучлена $a - b$ и многочлена, состоящего из всех одночленов степени $n - 1$, коэффициенты которых равны единице.

Можно предположить, что формула разложения двучлена $a^5 - b^5$ выглядит так:

$$a^5 - b^5 = (a - b)(a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 + b^4).$$

Чтобы доказать это тождество, достаточно перемножить многочлены, записанные в правой части:

$$\begin{gathered}(a - b)(a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 + b^4) = \\ = a^5 + a^4b + a^3b^2 + a^2b^3 + ab^4 - \\ - a^4b - a^3b^2 - a^2b^3 - ab^4 - b^5 = \\ = a^5 - b^5.\end{gathered}$$

Рассмотренные примеры подсказывают, что формула для разложения на множители разности n-х степеней двух выражений ($n > 1$) выглядит так:

$$\boxed{a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \ldots + ab^{n-2} + b^{n-1})} \qquad (4)$$

Убедимся в справедливости этого тождества, перемножив многочлены, записанные в правой части:

$$\begin{gathered}(a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \ldots + ab^{n-2} + b^{n-1}) = \\ = a^n + a^{n-1}b + a^{n-2}b^2 + a^{n-3}b^3 + \ldots + ab^{n-1} - \\ - a^{n-1}b - a^{n-2}b^2 - a^{n-3}b^3 - \ldots - ab^{n-1} - b^n = \\ = a^n - b^n.\end{gathered}$$

Если в формуле (2) заменить b на $-b$, то получим формулу для разложения на множители суммы кубов:

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2).$$

Воспользуемся этой идеей для разложения на множители двучлена $a^n + b^n$, где n — нечётное натуральное число. Имеем:

$$\begin{gathered}a^n + b^n = a^n - (-b)^n = \\ = (a - (-b))(a^{n-1} + a^{n-2}(-b) + a^{n-3}(-b)^2 + \ldots + a(-b)^{n-2} + (-b)^{n-1}) = \\ = (a + b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 - \ldots - ab^{n-2} + b^{n-1}).\end{gathered}$$

Итак, если n — нечётное натуральное число, большее 1, то справедлива такая формула:

$$\boxed{a^n + b^n = (a + b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 - \ldots - ab^{n-2} + b^{n-1})}$$

Пример 1. Докажите, что при любом натуральном n значение выражения $3^{2n} \cdot 7^n - 2^{5n}$ кратно 31.

Решение. $3^{2n} \cdot 7^n - 2^{5n} = (3^2)^n \cdot 7^n - (2^5)^n = 9^n \cdot 7^n - 32^n = 63^n - 32^n = (63 - 32)(63^{n-1} + 63^{n-2} \cdot 32 + \ldots + 63 \cdot 32^{n-2} + 32^{n-1})$.

Первый множитель полученного произведения равен 31, а второй — выражение, принимающее натуральные значения. Следовательно, значение данного выражения кратно 31. ■

Пример 2. Решите уравнение $(1 + x + ... + x^7)(1 + x + ... + x^5) = (1 + x + ... + x^6)^2$.

Решение. Проверкой устанавливаем, что число 1 не является корнем данного уравнения. Умножим обе части уравнения на выражение $(1 - x)^2$:

$$(1 - x)(1 + x + ... + x^7)(1 - x)(1 + x + ... + x^5) = ((1 - x)(1 + x + ... + x^6))^2;$$
$$(1 - x^8)(1 - x^6) = (1 - x^7)^2;$$
$$1 - x^6 - x^8 + x^{14} = 1 - 2x^7 + x^{14};$$
$$x^8 - 2x^7 + x^6 = 0;$$
$$x^6(x - 1)^2 = 0;$$
$$x = 0 \text{ или } x = 1.$$

Проверкой было установлено, что число 1 не является корнем данного уравнения.

Ответ: 0. ■

1. Запишите формулу для разложения на множители разности n-х степеней двух выражений.
2. Запишите формулу для разложения на множители суммы нечётных n-х степеней двух выражений.

Упражнения

21.1. Разложите на множители:

1) $a^7 - b^7$; 3) $x^9 - 1$; 5) $y^5 - 32$; 7) $x^7y^{14} + 1$;
2) $a^7 + b^7$; 4) $x^5 + 1$; 6) $m^{10} + n^5$; 8) $a^5b^{10} + c^{15}$.

21.2. Разложите на множители:

1) $a^5 + b^5$; 2) $a^{11} - 1$; 3) $y^7 - 128$; 4) $m^7n^{14}k^{21} + 1$.

21.3. Докажите, что при любом натуральном n значение выражения:

1) $7^n - 1$ кратно 6;
2) $19^{2n+1} + 1$ кратно 20;
3) $16^n - 11^n$ кратно 5.

21.4. Докажите, что при любом натуральном n значение выражения:

1) $17^n - 1$ кратно 16;
2) $23^{2n+1} + 1$ кратно 24;
3) $13^{2n+1} + 1$ кратно 14.

21.5. Докажите, что при любом натуральном n значение выражения:

1) $15^n + 13$ кратно 7;
2) $9^n + 5^n - 2$ кратно 4;
3) $5 \cdot 25^n + 13 \cdot 13^{2n}$ кратно 9;
4) $21^n + 4^{n+2}$ кратно 17.

21.6. Докажите, что при любом натуральном n значение выражения:

1) $27^n + 12$ кратно 13;
2) $17^n + 15$ кратно 16;
3) $8^n + 15^n - 2$ кратно 7;
4) $3 \cdot 9^n + 7 \cdot 7^{2n}$ кратно 10.

21.7. Докажите, что при любом натуральном n значение выражения:

1) $2^{2n} \cdot 5^n - 3^{2n}$ кратно 11; 2) $7^n \cdot 3^{3n} - 2^{2n}$ кратно 37.

21.8. Докажите, что число является составным:

1) $2^{1234} + 1$; 2) $1\underbrace{000...0}_{16\text{ нулей}}1$.

21.9. Докажите тождество:

1) $x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = (x + 1)(x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1)$;
2) $(x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)^2 - x^5 = (1 + x + x^2 + x^3 + x^4)(1 + x + x^2 + {}$ ${}+ x^3 + x^4 + x^5 + x^6)$.

21.10. Упростите выражение:

1) $3^{99} + 3^{98} \cdot 2 + 3^{97} \cdot 2^2 + ... + 3 \cdot 2^{98} + 2^{99} + 2^{100}$;
2) $4^{20} - 4^{19} \cdot 3 + 4^{18} \cdot 3^2 - ... - 4 \cdot 3^{19} + 3^{20}$.

21.11. Известно, что n и a — натуральные числа ($n > 1$), а значение выражения $a^n - 1$ является простым числом. Найдите a.

21.12. Известно, что значение выражения $2^n + 1$, где n — натуральное число, является простым числом. Докажите, что либо $n = 1$, либо n — степень числа 2.

21.13. Докажите, что значение выражения $1^{101} + 2^{101} + 3^{101} + ... + 30^{101}$ делится нацело на 31.

21.14. Решите уравнение:

1) $(1 + x + x^2)(1 + x + x^2 + x^3 + x^4) = (1 + x + x^2 + x^3)^2$;
2) $(1 + x + x^2 + x^3)(1 + x + x^2 + ... + x^7) = (1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5)^2$.

21.15. Докажите, что при любом натуральном n значение выражения:

1) $7 \cdot 5^{2n} + 12 \cdot 6^n$ делится нацело на 19;
2) $7^{n+2} + 8^{2n+1}$ делится нацело на 57;
3) $13^{n+2} + 14^{2n+1}$ делится нацело на 183;
4) $3^{2n+2} + 2^{6n+1}$ делится нацело на 11.

Упражнения для повторения

21.16. В ящике лежит некоторое количество яблок. Их можно выложить в 5 одинаковых рядов, или в 8 одинаковых рядов, или в 12 одинаковых рядов. Какое наименьшее количество яблок может находиться в ящике?

21.17. Машинист пассажирского поезда, шедшего со скоростью 56 км/ч, заметил, что встречный товарный поезд, который шёл со скоростью 34 км/ч, прошёл мимо него за 15 с. Какова длина товарного поезда?

21.18. Зелёный, жёлтый и красный сигналы светофора горят последовательно 50 с, 5 с и 20 с. В некоторый момент времени загорелся зелёный сигнал. Какой сигнал будет гореть через 3 мин?

21.19. Определим операцию Δ так: если a и b — натуральные числа, то $a \Delta b = a^b + b^a$. Найдите значение выражения $(2 \Delta 3) \Delta 2$.

21.20. Докажите, что значение выражения $5^{40} + 4$ — составное число.

КОГДА СДЕЛАНЫ УРОКИ

Язык, понятный всем

Здесь на трёх восточных языках — арабском, китайском и иврите — записано хорошо известное вам свойство: от перемены мест слагаемых сумма не меняется.

في الجمع تبديل أماكن الأعداد لا يغير النتيجة

加数的次序不影响加和的结果

כאשר מחברים שני מספרים, אין חשיבות איזה מהם הראשון ואיזה השני

Но человек, не владеющий этими языками, такое простое предложение не поймёт.

Тогда на помощь приходит интернациональный математический язык. На нём перевод выглядит так:

$$a + b = b + a.$$

Как и любой другой язык, он имеет свой алфавит — математические символы. Это цифры, буквы, знаки математических действий и т. д. Из них составляют «слова» математического языка, например выражения.

Казалось бы, чего проще — использовать математическую фразу «$2x = 4$» для записи линейного уравнения. Однако даже великий аль-Хорезми[1] записывал это предложение громоздко: «Два корня равны 4 дирхемам[2]». Это связано с тем, что во времена аль-Хорезми математической символики ещё не существовало.

Сказанное не означает, что до IX в. учёные не предпринимали попыток создать математический язык.

Ещё в I в. греческий математик Герон Александрийский начал обозначать неизвестную величину буквой ς (сигма). Следующий шаг в создании символики сделал в III в. Диофант Александрийский. В своём знаменитом труде «Арифметика» он ввёл обозначения не только для неизвестной величины, но и для некоторых её степеней.

Первая степень	σ
Вторая степень	Δ^{υ} (от Δυναμις — «дюнамис», что означает «сила», «степень»)
Третья степень	K^{υ} (от Κυβος — «кубос», т. е. куб)

Для равенства Диофант применял знак ισ — первые две буквы слова ισος — «исос», т. е. равный.

Вряд ли символику Диофанта можно считать удобной и наглядной. Например, он не ввёл никаких специальных символов для обозначения сложения и умножения. Обозначение всех неизвестных величин одной буквой ς также сильно затрудняло запись решения задач, в которых фигурировали несколько переменных.

С закатом эпохи античности алгебраическая символика Диофанта практически была забыта.

Возобновление процесса создания алгебраической символики связано с трудами талантливого немецкого учёного XIII в. Иордана Немора-

[1] Мы рассказывали о нём на с. 10–11.

[2] Дирхем — старинная арабская серебряная монета.

рия, который возродил в европейской математике идею буквенной символики.

В XV в. широкое распространение получили символы, применявшиеся выдающимся итальянским математиком Лукой Пачиоли (ок. 1445 — ок. 1515).

Немало сделали для совершенствования математического языка немецкие математики XVI в. Ян Видман и Адам Ризе.

Создателем буквенной символики по праву считается крупнейший французский математик XVI в. Франсуа Виет. Он первый обозначил буквами не только неизвестные, но и данные величины. Виет предложил: «Искомые величины будем обозначать буквой A или другой гласной, E, I, O, U, а данные — буквами B, D, G и другими согласными». Такие обозначения позволили Виету не только решать отдельные уравнения, но и исследовать процесс решения сразу целого класса уравнений. Например, благодаря символике Виета все линейные уравнения можно записать в виде $ax = b$, а следовательно, построить процесс решения уравнения в общем виде так, как мы это сделали в § 2.

Франсуа Виет (1540–1603)

Французский математик и юрист, основоположник современной буквенной символики.

Участвовали в создании языка математики и российские учёные. Леонард Эйлер ввёл знаки $\neq$ («не равно»), $\sum$ («сумма»), ( ) («скобки», совместно с Г. Лейбницем) и другие обозначения, о которых вы сможете узнать в курсе высшей математики. Эйлер использовал в своих трудах обозначения, предложенные другими учёными (например, обозначение числа π, впервые введённое Уильямом Джонсом в 1706 г.). Благодаря авторитету и широкому распространению трудов Эйлера использованные им обозначения закрепились в математическом языке.

Языки многих народов продолжают развиваться. Не составляет исключения и математический язык. Новые открытия приносят в математику новые символы и термины.

Леонард Эйлер (1707–1783)

Математик, механик, астроном родился в Швейцарии. С 1727 по 1741 г. и с 1766 по 1783 г. работал в Санкт-Петербурге.

Итоги главы 2

Тождественно равные выражения

Выражения, соответственные значения которых равны при любых значениях входящих в них переменных, называют тождественно равными.

Тождество

Равенство, верное при любых значениях входящих в него переменных, называют тождеством.

Приёмы доказательства тождеств

- Тождественно преобразуют одну из частей данного равенства, получая другую часть.
- Тождественно преобразуют каждую из частей данного равенства, получая одно и то же выражение.
- Доказывают, что разность левой и правой частей данного равенства тождественно равна нулю.

Степень с натуральным показателем

- Степенью числа a с натуральным показателем n, бо́льшим 1, называют произведение n множителей, каждый из которых равен a.
- Степенью числа a с показателем 1 называют само это число.

Знак степени

При возведении отрицательного числа в степень с чётным показателем получаем положительное число, а при возведении отрицательного числа в степень с нечётным показателем получаем отрицательное число.

Свойства степени с натуральным показателем

- **Основное свойство степени**

Для любого числа a и любых натуральных чисел m и n справедливо равенство:

$$a^m a^n = a^{m+n}.$$

- Для любого числа a, отличного от нуля, и любых натуральных чисел m и n таких, что $m > n$, справедливо равенство:

$$a^m : a^n = a^{m-n}.$$

- Для любого числа a и любых натуральных чисел m и n справедливо равенство:

$$(a^m)^n = a^{mn}.$$

- Для любых чисел a и b и любого натурального числа n справедливо равенство:

$$(ab)^n = a^n b^n.$$

Одночлен

Выражение, представляющее собой произведение чисел, переменных и их степеней, называют одночленом.

Коэффициент одночлена

Числовой множитель одночлена, записанного в стандартном виде, называют коэффициентом одночлена.

Степень одночлена

Степенью одночлена называют сумму показателей степеней всех переменных, входящих в него. Степень одночлена, который является числом, отличным от нуля, считают равной нулю.

Многочлен

Выражение, которое является суммой нескольких одночленов, называют многочленом.

Многочлен стандартного вида

Многочлен, состоящий из одночленов стандартного вида, среди которых нет подобных, называют многочленом стандартного вида.

Степень многочлена

Степенью многочлена стандартного вида называют наибольшую из степеней одночленов, из которых составлен этот многочлен.

Умножение одночлена на многочлен

Чтобы умножить одночлен на многочлен, нужно умножить этот одночлен на каждый член многочлена и полученные произведения сложить.

Умножение многочленов

Чтобы умножить многочлен на многочлен, можно каждый член одного многочлена умножить на каждый член другого и полученные произведения сложить.

Произведение разности и суммы двух выражений

Произведение разности и суммы двух выражений равно разности квадратов этих выражений.

$$(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$$

Разность квадратов двух выражений

Разность квадратов двух выражений равна произведению разности этих выражений и их суммы.

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$$

Квадрат суммы двух выражений

Квадрат суммы двух выражений равен квадрату первого выражения плюс удвоенное произведение первого и второго выражений плюс квадрат второго выражения.

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Квадрат разности двух выражений

Квадрат разности двух выражений равен квадрату первого выражения минус удвоенное произведение первого и второго выражений плюс квадрат второго выражения.

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

Квадрат суммы трёх выражений

Квадрат суммы трёх выражений равен сумме квадратов этих выражений, сложенной с суммой удвоенных произведений каждых двух выражений.

$$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$$

Сумма кубов двух выражений

Сумма кубов двух выражений равна произведению суммы этих выражений и неполного квадрата их разности.

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$$

Разность кубов двух выражений

Разность кубов двух выражений равна произведению разности этих выражений и неполного квадрата их суммы.

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

Куб суммы двух выражений

Куб суммы двух выражений равен кубу первого выражения плюс утроенное произведение квадрата первого выражения и второго выражения плюс утроенное произведение первого выражения и квадрата второго выражения плюс куб второго выражения.

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

Куб разности двух выражений

Куб разности двух выражений равен кубу первого выражения минус утроенное произведение квадрата первого выражения и второго выражения плюс утроенное произведение первого выражения и квадрата второго выражения минус куб второго выражения.

$$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

Формулы для разложения на множители выражений вида $a^n - b^n$ и $a^n + b^n$

$a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + ... + ab^{n-2} + b^{n-1})$, где n — натуральное число, большее 1

$a^n + b^n = (a + b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 - ... - ab^{n-2} + b^{n-1})$, где n — нечётное натуральное число, большее 1

глава

3 Функции

В этой главе вы будете изучать связи между величинами. Познакомитесь с особым правилом, определяющим эти связи, — функцией. Изучите основные способы задания функции.

§ 22 Множество и его элементы

Рассмотрим словосочетания: косяк рыб, стая птиц, рой пчёл, коллекция марок, собрание картин, набор ручек, букет цветов, компания друзей, парк машин, отара овец.

Из слов этих словосочетаний можно составить новые: например, букет баранов, косяк картин, коллекция друзей, но они получились нелепыми. В то же время такие словосочетания, как коллекция рыб, коллекция птиц, коллекция картин, коллекция ручек, коллекция машин, имеют смысл. Дело в том, что слово «коллекция» универсальное. Однако в математике есть более ёмкое слово, которым можно заменить любое из первых слов в приведённых парах. Это слово **множество**.

Приведём ещё несколько примеров множеств:

- множество учеников вашего класса;
- множество планет Солнечной системы;
- множество чётных чисел;
- множество точек, лежащих на одной прямой;
- множество натуральных чисел, которое обозначают буквой $\boldsymbol{N}$.

Как правило, множества обозначают прописными латинскими буквами: A, B, C, D и т. д.

Объекты, составляющие данное множество, называют **элементами** этого множества. Обычно элементы обозначают строчными латинскими буквами: a, b, c, d и т. д.

Если a принадлежит множеству A, то пишут $a \in A$ (читают: «a принадлежит множеству A»). Если b не принадлежит множеству A, то пишут $b \notin A$ (читают: «b не принадлежит множеству A»).

Например, $12 \in \boldsymbol{N}$, $-3 \notin \boldsymbol{N}$, $\frac{2}{3} \notin \boldsymbol{N}$.

Если множество A состоит из трёх элементов a, b, c, то пишут $A = \{a, b, c\}$.

Например, если M — множество натуральных делителей числа 6, то пишут $M = \{1, 2, 3, 6\}$. Множество натуральных делителей числа 6, являющихся составными числами, выглядит так: $\{6\}$. Это пример **одноэлементного** множества.

Задание множества с помощью фигурных скобок, в которых указан список его элементов, удобно в тех случаях, когда множество состоит из небольшого количества элементов.

Определение

Множества A и B называют равными, если они состоят из одних и тех же элементов, т. е. каждый элемент множества A принадлежит множеству B и наоборот — каждый элемент множества B принадлежит множеству A.

Если множества A и B равны, то пишут $A = B$.

Из определения следует, что ***множество однозначно определяется своими элементами***.

Если множество записано с помощью фигурных скобок, то порядок, в котором выписаны его элементы, не имеет значения. Так, множество, состоящее из трёх элементов a, b, c, допускает шесть вариантов записи:

$$\{a, b, c\}, \{a, c, b\}, \{b, a, c\}, \{b, c, a\}, \{c, a, b\}, \{c, b, a\}.$$

Поскольку из определения равных множеств следует, что, например, $\{a, b, c\} = \{a, a, b, c\}$, то в дальнейшем будем рассматривать множества, состоящие из разных элементов. Так, множество букв слова «космодром» имеет вид {к, о, с, м, д, р}.

Заметим, что $\{a\} \neq \{\{a\}\}$. Действительно, множество $\{a\}$ состоит из одного элемента a; множество $\{\{a\}\}$ состоит из одного элемента — множества $\{a\}$.

Чаще всего множество задают одним из двух следующих способов.

Первый способ состоит в том, что множество задают указанием (перечислением) всех его элементов. Мы уже использовали этот способ, записывая множество с помощью фигурных скобок, в которых указывали список его элементов.

Ясно, что не всякое множество можно задать таким способом. Например, множество чётных чисел так задать невозможно.

Второй способ состоит в том, что указывают **характеристическое свойство** элементов множества, т. е. свойство, которым обладают все элементы данного множества и только они. Например, свойство «натуральное число при делении на 2 даёт в остатке 1» задаёт множество нечётных чисел.

Если задавать множество характеристическим свойством его элементов, то может оказаться, что ни один объект этим свойством не обладает.

Обратимся к примерам.

• Множество треугольников, стороны которых пропорциональны числам 1, 2, 5.

Из неравенства треугольника следует, что это множество не содержит ни одного элемента.

• Множество A учеников вашего класса, являющихся мастерами спорта по шахматам.

Может оказаться, что множество A также не содержит ни одного элемента.

• Рассматривая множество корней произвольного уравнения, следует предусмотреть ситуацию, когда уравнение корней не имеет.

Приведённые примеры указывают на то, что удобно к совокупности множеств отнести ещё одно особенное множество, не содержащее ни одного элемента. Его называют **пустым множеством** и обозначают символом $\varnothing$.

Заметим, что множество $\{\varnothing\}$ не является пустым. Оно содержит один элемент — пустое множество.

?

1. Как обозначают множество и его элементы?
2. Как обозначают множество натуральных чисел?
3. Как записать, что элемент принадлежит (не принадлежит) множеству A?
4. Какие множества называют равными?
5. Какие существуют способы задания множеств?
6. Какое множество называют пустым? Как его обозначают?

Упражнения

22.1. Как называют множество точек угла, равноудалённых от его сторон?

22.2. Как называют множество волков, подчиняющихся одному вожаку?

22.3. Назовите какое-нибудь множество учеников вашей школы.

22.4. Как называют множество учителей, работающих в одной школе?

22.5. Поставьте вместо звёздочки знак $\in$ или $\notin$ так, чтобы получилось верное утверждение:

1) $-8 * \boldsymbol{N}$; 2) $0{,}2 * \boldsymbol{N}$; 3) $7 * \boldsymbol{N}$.

22.6. Пусть M — множество делителей числа 8. Поставьте вместо звёздочки знак $\in$ или $\notin$ так, чтобы получилось верное утверждение:

1) $1 * M$; 2) $3 * M$; 3) $4 * M$.

22.7. Какие из следующих утверждений верны:

1) $1 \in \{1, 2, 3\}$; 3) $\{1\} \in \{1, 2\}$; 5) $\varnothing \notin \{1, 2\}$;

2) $1 \notin \{1\}$; 4) $\{1\} \in \{\{1\}\}$; 6) $\varnothing \in \{\varnothing\}$?

22.8. Запишите множество корней уравнения:

1) $x(x - 1) = 0$; 3) $x = 2$;

2) $(x - 2)(x^2 - 4) = 0$; 4) $x^2 + 3 = 0$.

22.9. Задайте с помощью перечисления элементов множество:

1) правильных дробей со знаменателем 7;

2) правильных дробей, знаменатель которых не больше 4;

3) букв слова «математика»;

4) цифр числа 5555.

22.10. Равны ли множества A и B, если:

1) $A = \{3, -2\}$, $B = \{-2, 3\}$;

2) $A = \{0\}$, $B = \{\{0\}\}$?

22.11. Равны ли множества A и B, если:

1) A — множество корней уравнения $|x| = x$, B — множество неотрицательных чисел;

2) A — множество треугольников, у которых все углы равны; B — множество треугольников, у которых высоты совпадают с биссектрисами?

22.12. Какие из следующих множеств равны пустому множеству:

1) множество треугольников, сумма углов которых равна 181°;

2) множество горных вершин высотой более 8800 м;

3) множество пар смежных углов, разность которых равна 1°;

4) множество корней уравнения $|x| + 5 = 1$?

Упражнения для повторения

22.13. Кириллу требуется 30 мин, чтобы добраться до стадиона и вернуться домой, если до стадиона он идёт пешком, а возвращается на автобусе. Если же он едет на автобусе в оба конца, то на весь путь затрачивает 12 мин. Сколько времени ему потребуется, чтобы преодолеть путь до стадиона и обратно пешком?

22.14. Каждое третье дерево в саду — яблоня, а каждое восьмое — груша. Определите, сколько деревьев растёт в саду, если известно, что их меньше 100, но больше 80.

22.15. Разложите на множители многочлен $27x^3 - 18x^2y - 12xy^2 + 8y^3$.

22.16. Докажите, что значение выражения $4^9 + 6^{10} + 3^{20}$ является квадратом натурального числа.

§ 23 Связи между величинами. Функция

Учитель пишет на доске. При этом меняются длина мелового следа, масса, объём и даже температура кусочка мела.

Работает школьная столовая. В течение дня меняются количество посетивших её учеников, расходы электроэнергии и воды, денежная выручка и т. п.

Вообще, в происходящих вокруг нас процессах многие величины меняют свои значения. Понятно, что некоторые из этих величин связаны между собой, т. е. изменение одной величины влечёт за собой изменение другой.

Многие науки, такие как физика, химия, биология и другие, исследуют зависимости между величинами. Изучает эти связи и математика, конструируя **математические модели** реальных процессов. С понятием математической модели вы уже встречались в § 3.

Рассмотрим несколько примеров.

Пример 1. Изменяется сторона квадрата. Понятно, что при этом будет меняться и его периметр. Если длину стороны квадрата обозначить a, а периметр — P, то зависимость значения переменной P от значения переменной a (коротко говорят: «зависимость переменной P от переменной a») задаётся формулой

$$P = 4a.$$

Эта формула является математической моделью связи между такими величинами, как длина стороны квадрата и его периметр.

С помощью этой формулы можно, выбрав произвольную длину стороны, найти соответствующее значение периметра квадрата. Поэтому в этой модели переменную a называют **независимой переменной**, а переменную P — **зависимой переменной**.

Подчеркнём, что эта формула задаёт правило, с помощью которого по значению независимой переменной можно *однозначно* найти значение зависимой переменной. ■

Пример 2. Семья положила в банк 100 000 р. под 10 % годовых. Тогда через год величина M — сумма денег на счёте — станет равной

$$M = 100\,000 + \frac{100\,000 \cdot 10}{100} = 110\,000 \text{ (р.)}.$$

Через 2 года эта сумма составит

$$M = 110\,000 + \frac{110\,000 \cdot 10}{100} = 121\,000 \text{ (р.)}.$$

Аналогично можно установить, что через 3 года $M = 133\ 100$ р., через 4 года $M = 146\ 410$ р., через 5 лет $M = 161\ 051$ р.

В таблице показано, как зависит сумма денег, находящихся на счёте, от количества прошедших лет.

Количество лет, n	1	2	3	4	5
Сумма денег на счёте, M, р.	110 000	121 000	133 100	146 410	161 051

Эта таблица является математической моделью зависимости величины M от величины n. Здесь n выступает в роли независимой переменной, а M — зависимой переменной.

Подчеркнём, что эта таблица задаёт правило, с помощью которого по значению независимой переменной можно *однозначно* найти значение зависимой переменной. ■

Пример 3. На рисунке 23.1 изображён график зависимости температуры воздуха от времени суток.

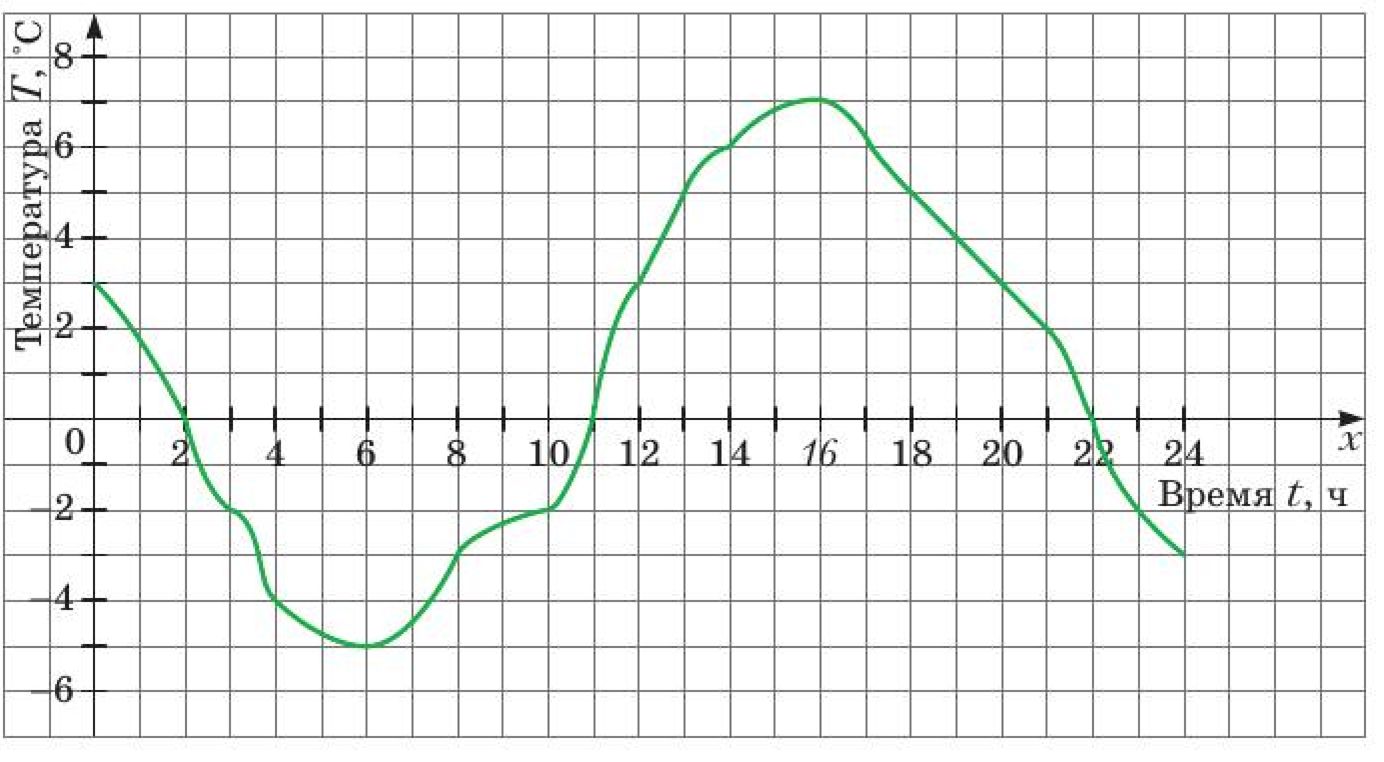


Рис. 23.1

Используя этот график, можно, выбрав произвольный момент времени t, найти соответствующую температуру воздуха T (в градусах Цельсия). Таким образом, величина t является независимой переменной, а величина T — зависимой.

Этот график можно рассматривать как математическую модель зависимости величины T (температуры) от величины t (времени).

Подчеркнём, что этот график задаёт правило, с помощью которого по значению независимой переменной можно *однозначно* найти значение зависимой переменной. ■

Несмотря на существенные различия моделей зависимостей, описанных в этих трёх примерах, им всем присуще следующее: *указано правило, с помощью которого по каждому значению независимой переменной можно найти единственное значение зависимой переменной*. Такое правило называют **функцией**, а соответствующую зависимость одной переменной от другой — **функциональной**.

Итак, правила, описанные в примерах 1, 2 и 3, являются функциями.

Не всякая зависимость одной переменной от другой является функциональной. Например, пусть длина маршрута автобуса равна 15 км. Стоимость проезда определяется следующей таблицей.

Стоимость проезда, р.	30	60	90
Длина пути, который проезжает пассажир, км	До 5	От 5 до 10	От 10 до 15

Ясно, что переменные величины «стоимость проезда» и «длина пути, который проезжает пассажир» связаны между собой. Однако если считать стоимость проезда независимой переменной, то описанная зависимость не является функциональной. Действительно, если пассажир заплатил 30 р., то нельзя *однозначно* установить длину пути, который он проехал.

Если в примере 3 температуру T считать независимой переменной, то не всегда возможно по значению величины T *однозначно* найти значение величины t. Поэтому приведённая зависимость времени t от температуры T не является функциональной.

Разъяснить, что такое функция, можно с помощью понятия множества.

Пусть X — множество значений независимой переменной, Y — множество значений зависимой переменной. Функция — это правило, с помощью которого по каждому значению независимой переменной из множества X можно найти единственное значение зависимой переменной из множества Y.

Другими словами: *функция — это правило, которое каждому элементу множества X ставит в соответствие единственный элемент множества Y.*

Например, пусть X — множество учащихся вашего класса, Y — множество, элементами которого являются дни недели. Каждому учащемуся поставим в соответствие день недели, в который он родился. Описанное правило позволяет по каждому элементу множества X найти единственный элемент множества Y. Следовательно, это правило является функцией.

Обычно независимую переменную обозначают буквой x, зависимую — буквой y, функцию (правило) — буквой f. Если переменная y функционально зависит от переменной x, то этот факт обозначают так: $y = f(x)$ (читают: «игрек равен эф от икс»).

Независимую переменную ещё называют **аргументом функции**.

Все значения аргумента образуют множество, которое называют **областью определения функции**. Так, в примере 1 областью определения функции является множество положительных чисел; в примере 2 — множество $\{1, 2, 3, 4, 5\}$; в примере 3 — множество неотрицательных чисел, не превосходящих 24.

Значение зависимой переменной ещё называют **значением функции**. Значение функции f, которое соответствует значению x_0 аргумента x, обозначают $f(x_0)$. Например, $f(7)$ — это значение функции при $x = 7$.

Так, если каждое из правил, описанных в примерах 1, 2 и 3, обозначить буквой f, то в первом примере $f(2) = 8$, во втором примере $f(2) = 121\ 000$, в третьем примере $f(2) = 0$.

Вообще, запись $f(a) = b$ означает, что значению a аргумента соответствует значение b функции.

Все значения зависимой переменной образуют множество, которое называют **областью значений функции**.

В примере 1 область значений функции — это множество положительных чисел, в примере 2 — множество $\{110\ 000, 121\ 000, 133\ 100, 146\ 410, 161\ 051\}$, в примере 3 — множество всех чисел, которые не меньше -5 и не больше 7.

?

1. Какое правило называют функцией?

2. Какую зависимость одной переменной от другой называют функциональной?

3. Как читают запись $y = f(x)$?

4. Что называют аргументом функции?

5. Что такое область определения функции?
6. Что называют значением функции?
7. Как читают запись $f(a) = b$ и что она означает?
8. Что такое область значений функции?

Упражнения

23.1. Связаны ли между собой периметр равностороннего треугольника и его сторона? Если сторона треугольника равна a, а периметр — P, то какой формулой задаётся зависимость переменной P от переменной a? Является ли эта зависимость функциональной?

23.2. Связаны ли между собой площадь квадрата и его сторона? Если сторона квадрата равна a, а площадь — S, то какой формулой задаётся зависимость переменной S от переменной a? Является ли эта зависимость функциональной?

23.3. Автомобиль движется со скоростью 60 км/ч. Как зависит длина пройденного им пути s от времени движения t? Задайте эту зависимость формулой. Является ли эта зависимость функциональной? В случае утвердительного ответа назовите аргумент соответствующей функции.

23.4. В цистерне было 300 л воды. Через открытый кран каждую минуту из цистерны выливается 2 л воды. Задайте формулой зависимость объёма V воды в цистерне от времени t, в течение которого из неё выливается вода. Является ли правило, с помощью которого по значению переменной t находят значение переменной V, функцией? В случае утвердительного ответа укажите область определения и область значений этой функции.

23.5. Пусть a — длина ребра куба, V — его объём. Задайте формулой зависимость переменной V от переменной a. Является ли эта зависимость функциональной?

23.6. Автомобиль проехал 120 км со скоростью v. Какой формулой задаётся зависимость времени движения t от скорости v автомобиля? Является ли эта зависимость функциональной? В случае утвердительного ответа укажите, что является аргументом соответствующей функции.

23.7. Пусть градусные меры двух смежных углов равны α и β. Задайте формулой зависимость β от α. Является ли эта зависимость функциональной? В случае утвердительного ответа укажите, что является аргументом соответствующей функции, её область определения и область значений.

23.8. В вашем классе была проведена контрольная работа по математике.

1) Каждому ученику поставили в соответствие оценку, которую он получил.

2) Каждой оценке поставили в соответствие ученика, который её получил.

Какое из этих правил является функцией?

23.9. Рассмотрим правило, согласно которому каждому натуральному числу соответствует противоположное ему число. Является ли такое правило функцией?

23.10. Каждому неотрицательному числу поставили в соответствие само это число, а каждому отрицательному числу — число, ему противоположное. Является ли такое правило функцией?

23.11. Рассмотрим правило, по которому каждому натуральному числу ставится в соответствие первая слева цифра его десятичной записи. Является ли это правило функцией? В случае утвердительного ответа укажите область её значений.

23.12. Каждому рациональному числу, отличному от нуля, соответствует обратное ему число. Является ли такое правило функцией?

23.13. На рисунке 23.2 изображён график изменения температуры раствора во время химического опыта.

1) Какова была начальная температура раствора?

2) Какой была температура раствора через 30 мин после начала опыта? Через полтора часа?

3) Какой была самая высокая температура раствора и через сколько минут после начала опыта?

4) Через сколько минут после начала опыта температура раствора была 35 °C?

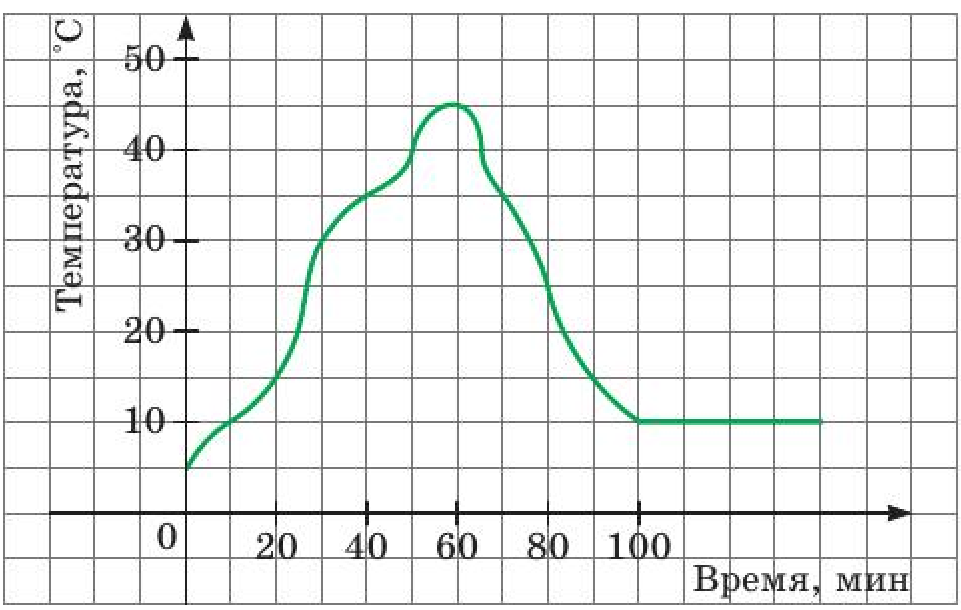


Рис. 23.2

Составьте по графику таблицу изменения температуры раствора через каждые 10 мин в течение первых двух часов после начала опыта.

23.14. На рисунке 23.3 изображён график изменения температуры воздуха в течение суток. Пользуясь этим графиком, определите:

1) какой была температура воздуха в 2 ч? В 8 ч? В 12 ч? В 16 ч? В 22 ч?

2) в котором часу температура воздуха была –3 °C? –4 °C? 0 °C?

3) какой была самая низкая температура и в котором часу?

4) какой была самая высокая температура и в котором часу?

5) в течение какого промежутка времени температура воздуха была ниже 0 °C? Выше 0 °C?

6) в течение какого промежутка времени температура воздуха повышалась? Понижалась?

Составьте по графику таблицу изменения температуры воздуха в течение суток через каждые 2 ч.

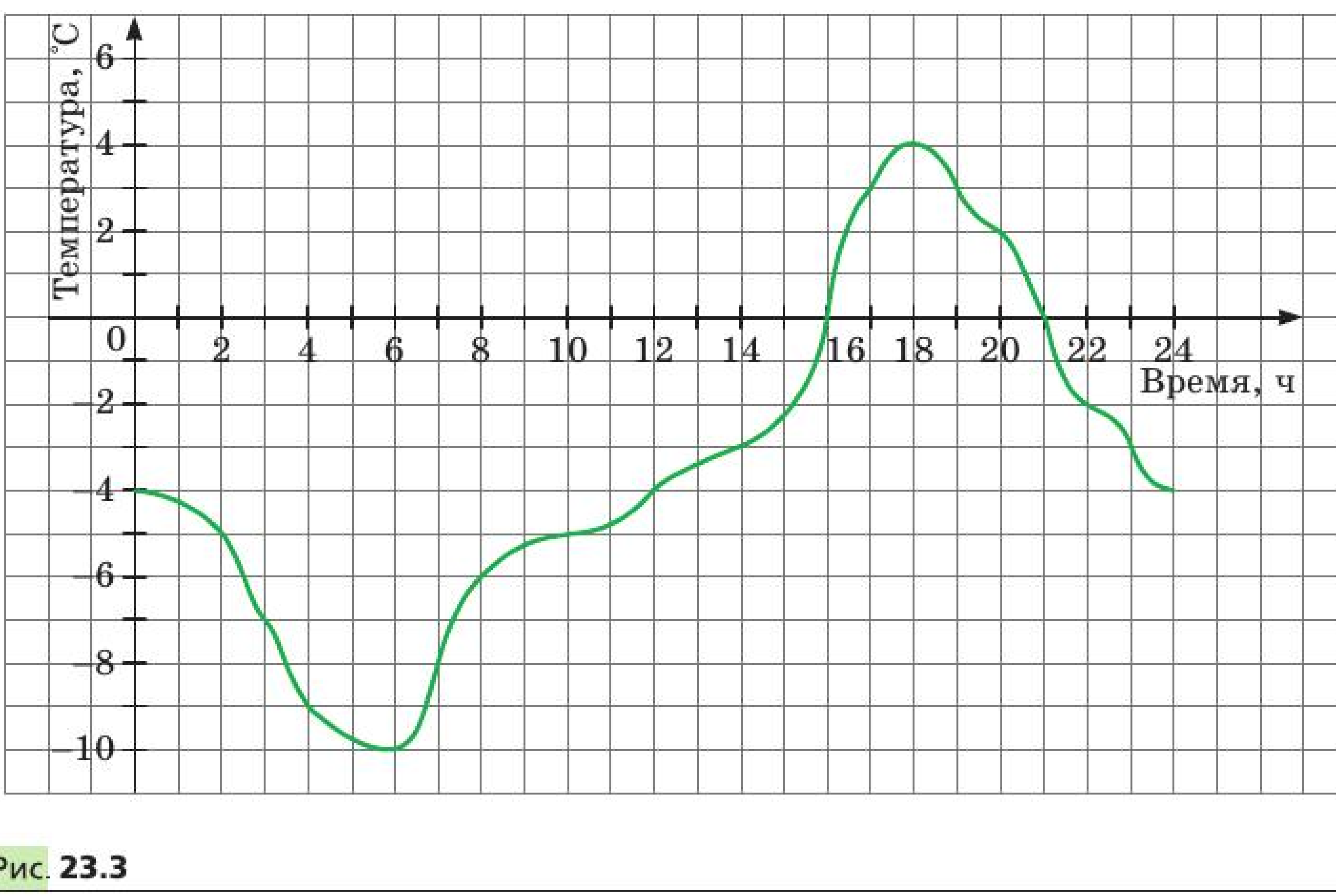


Рис. **23.3**

23.15. Мотоциклист совершил поездку от дома до дачи и обратно. На рисунке 23.4 изображён график изменения расстояния в зависимости от времени (*график движения мотоциклиста*). Пользуясь графиком, определите:

1) какое расстояние проехал мотоциклист за первый час движения?

2) на каком расстоянии от дома находится дача? Сколько времени мотоциклист находился на даче?

3) на каком расстоянии от дома мотоциклист сделал остановку на обратном пути? Сколько времени продолжалась эта остановка?

4) на каком расстоянии от дома был мотоциклист через 5 ч после начала движения?

5) с какой скоростью двигался мотоциклист последние полчаса?

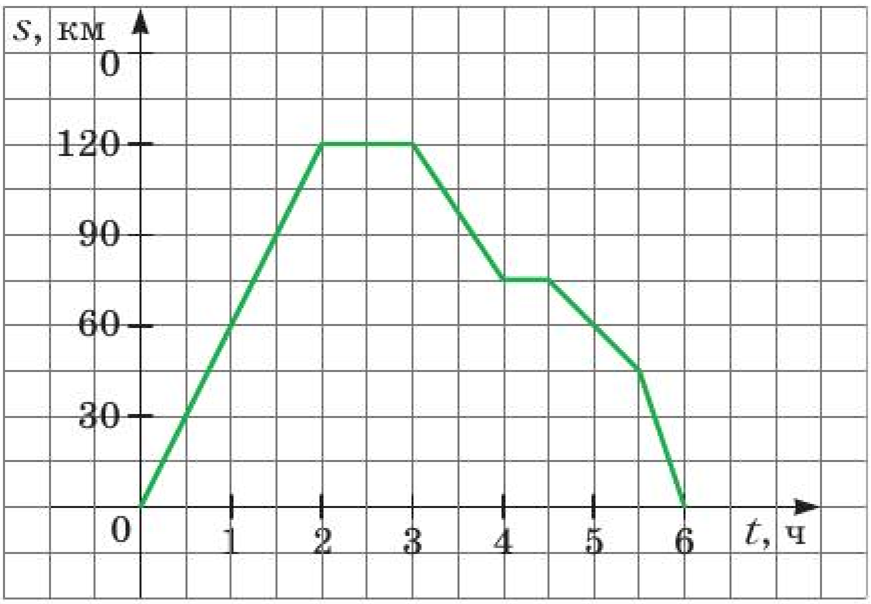


Рис. **23.4**

23.16. На рисунке 23.5 изображён график движения туриста.

1) На каком расстоянии от дома был турист через 10 ч после начала движения?

2) Сколько времени он потратил на остановку?

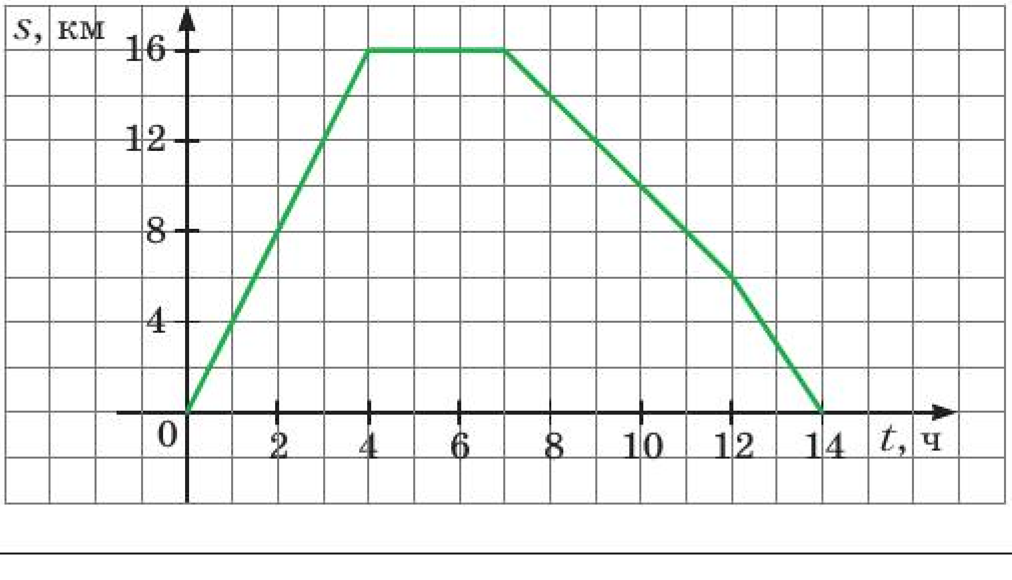


Рис. **23.5**

3) Через сколько часов после выхода турист был на расстоянии 8 км от дома?

4) С какой скоростью шёл турист до остановки?

5) С какой скоростью шёл турист последние 2 ч?

23.17. Каждому числу поставили в соответствие расстояние от точки, изображающей это число на координатной прямой, до начала отсчёта. Поясните, почему описанное правило является функцией. Найдите её область определения и область значений. Обозначив эту функцию буквой f, найдите $f(2)$, $f(-5)$, $f(0)$.

23.18. Рассмотрим функцию g, заданную следующим правилом: каждому однозначному натуральному числу поставили в соответствие последнюю цифру его квадрата. Найдите: 1) область определения и область значений функции; 2) $g(7)$, $g(3)$, $g(1)$, $g(9)$, $g(4)$.

23.19. Рассмотрим правило, по которому числу 0 ставятся в соответствие все чётные числа, а числу 1 — все нечётные числа. Является ли это правило функцией?

23.20. Рассмотрим правило, по которому каждому натуральному числу ставится в соответствие сумма цифр его десятичной записи (однозначному числу соответствует само это число). Является ли это правило функцией? В случае утвердительного ответа укажите область её значений.

23.21. Придумайте функцию f, областью определения которой является множество натуральных чисел, а областью значений — множество $\{0, 1, 2\}$. Найдите $f(7)$, $f(15)$, $f(101)$.

23.22. Рассмотрим правило, по которому каждому натуральному числу поставили в соответствие остаток при делении его на 7. Является ли это правило функцией? В случае утвердительного ответа найдите область определения и область значений этой функции.

23.23. В таблице приведены измерения температуры воздуха в течение суток через каждый час[1]. Постройте по этим данным график изменения температуры.

Время суток, ч	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Температура, °С	2	3	1	0	–2	–3	–5	–4	–2	0	1	4	7

[1] В приведённой таблице значение аргумента в каждом следующем столбце на 1 больше значения аргумента в предыдущем столбце. В таких случаях говорят, что таблица составлена с *шагом* 1.

Время суток, ч	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
Температура, °C	8	9	7	5	4	3	2	1	0	–2	–3	–6

Пользуясь графиком, найдите, в течение какого времени температура повышалась и в течение какого времени понижалась.

23.24. Велосипедист выехал из дома на прогулку. Сначала он ехал 2 ч со скоростью 12 км/ч, потом отдохнул 1 ч и вернулся домой со скоростью 8 км/ч. Постройте график движения велосипедиста.

23.25. В таблице приведены данные об уровне воды в реке по отношению к ординару (среднему уровню воды) с 1 по 15 мая.

Постройте график изменения уровня воды в реке за указанный период.

Дата	Уровень воды, см	Дата	Уровень воды, см	Дата	Уровень воды, см
1	8	6	20	11	4
2	10	7	18	12	0
3	12	8	14	13	–3
4	15	9	10	14	–5
5	16	10	8	15	–6

23.26. В начале нагревания температура воды была 6 °C. Во время нагревания температура воды повышалась каждую минуту на 2 °C.

1) Запишите формулу зависимости температуры T воды от времени t её нагревания.

2) Составьте таблицу значений функции $T(t)$ за время нагревания от 0 мин до 10 мин с шагом 1 мин.

3) Постройте график изменения температуры воды в зависимости от изменения времени нагревания в течение первых 10 мин.

23.27. Прямолинейная дорога проходит мимо туристического лагеря. Турист, находясь на расстоянии 5 км от лагеря, начал двигаться по этой дороге со скоростью 4 км/ч, удаляясь от лагеря.

1) Найдите расстояние s от лагеря, на котором будет находиться турист через t ч после начала движения.

2) Заполните таблицу значений s.

t, ч	0	0,25	0,5	0,75	1	1,25	1,5	1,75	2
s, км									

3) Пользуясь заполненной таблицей, постройте график зависимости расстояния до лагеря от времени движения.

23.28. В экономических исследованиях часто используют кривую спроса. *Кривая спроса* — это график, показывающий, как зависит спрос на товар от его цены. В таблице приведена зависимость спроса на картофель в некотором регионе (в тысячах тонн) от цены 1 кг картофеля.

Цена 1 кг картофеля, р.	12	14	16	18	20	22
Спрос, тыс. т	15	12	10	6	4	1

Представьте данные, приведённые в таблице, графически. Соединив полученные точки отрезками, постройте кривую спроса на картофель.

23.29. В городском совете Солнечного города представлены две партии: партия Знайки и партия Незнайки. Всего в городском совете 20 мест. В таблице приведено количество депутатских мест, полученных партией Знайки в течение 8 последних выборов.

Выборы	1	2	3	4	5	6	7	8
Количество депутатов от партии Знайки	14	12	10	16	18	15	14	10

1) Составьте аналогичную таблицу для партии Незнайки.

2) В одной системе координат представьте данные каждой таблицы графически. Соединив полученные точки отрезками, постройте «кривые популярности» каждой партии.

23.30. В баке было 8 л топлива. Каждую минуту в бак вливается 4 л.

1) Запишите зависимость количества y литров топлива в баке от времени x, в течение которого топливо заливалось в бак.

2) Начертите график изменения y, придавая x значения от 0 до 10.

3) Пользуясь графиком, определите:

а) сколько литров топлива будет в баке через 3 мин, через 5 мин;

б) через сколько минут в баке будет 40 л топлива.

4) Через сколько минут бак будет наполнен, если его ёмкость 80 л?

23.31. На складе было 100 т угля. Ежедневно на склад привозили по 20 т угля.

1) Выразите формулой зависимость количества m угля на складе от времени t.

2) Начертите график этой зависимости.

23.32. Какой из данных графиков (рис. 23.6) иллюстрирует зависимость переменной y от переменной x, приведённую ниже:

1) стоимость проезда в автобусе возрастает на 5 р. через каждые 10 км пути (x км — длина пути, y р. — стоимость проезда);

2) металлическую пружину растянули и отпустили (x с — время, y см — длина пружины);

3) цена клубники на рынке в течение мая — июня (x дней — время, y р. — цена)?

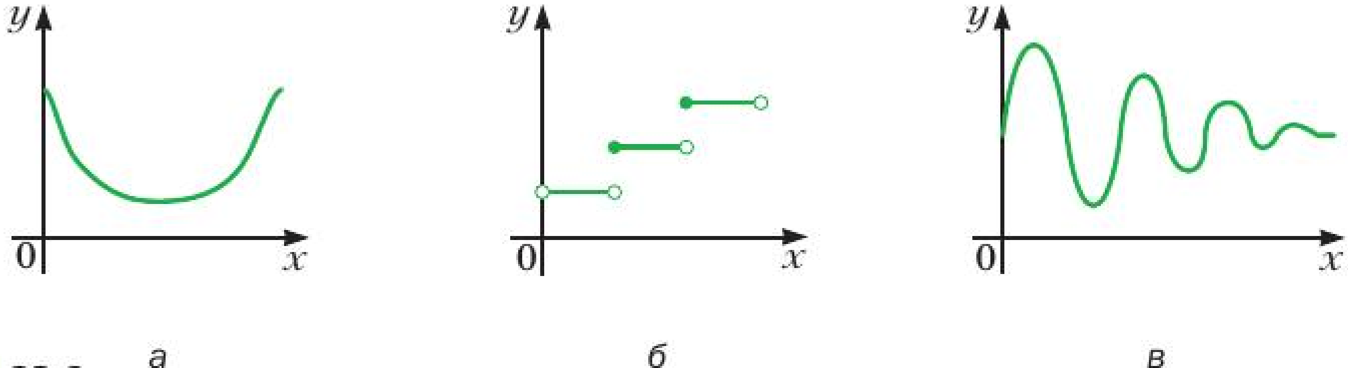


Рис. 23.6

Упражнения для повторения

23.33. Решите уравнение:

1) $-1,2x + 7,2 = 0$;

2) $-\frac{1}{3}x - 6 = 0$;

3) $3x + 1,5 = -2,5$;

4) $6 - 0,5x = 16$.

23.34. Разложите на множители выражение:

1) $20z^2 + 3xy - 15xz - 4yz$;

2) $0,027a^{12} + b^9$.

23.35. Найдите такое наименьшее натуральное значение a, при котором выражение $x^2 - 4x + 2a$ принимает положительные значения при любом значении x.

23.36. (*Задача из «Теоретического и практического курса чистой математики» Е. Войтяховского*[1].) Капитан на вопрос, сколько у него в команде людей, ответил, что $\frac{2}{5}$ его команды в карауле, $\frac{2}{7}$ — на работе, $\frac{1}{4}$ — в лазарете и 27 человек в наличии. Вопрос: сколько человек было в его команде?

§ 24 Способы задания функции

Примеры, рассмотренные в предыдущем параграфе, показывают, что функцию можно задавать различными способами.

Функция считается заданной, если указаны её область определения и правило, с помощью которого можно по каждому значению независимой переменной найти значение зависимой переменной.

Вам не раз приходилось формулировать различные правила. Поскольку функция — это правило, то её можно задать словами. Такой способ задания функции называют **описательным**.

Приведём несколько примеров.

Пример 1. Пусть независимая переменная принимает любые значения. Значения зависимой переменной находим по такому правилу: каждое значение независимой переменной умножим на два и из полученного произведения вычтем единицу. Очевидно, что таким способом значение зависимой переменной находится однозначно. Следовательно, мы задали некоторую функцию f, областью определения которой является множество всех чисел. Например, $f(2) = 2 \cdot 2 - 1 = 3$, $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \cdot 2 - 1 = 0$, $f(-13,4) = -13,4 \cdot 2 - 1 = -27,8$ и т. п. ■

Пример 2. Пусть независимая переменная принимает любые значения, кроме 0. Соответствующие значения зависимой и независимой переменных — взаимно обратные числа. Здесь задана функция f, область определения которой — множество всех чисел, кроме 0. Например, $f(1) = 1$; $f(3) = \frac{1}{3}$; $f\left(-\frac{1}{2}\right) = -2$ и т. п. ■

[1] Ефим Войтяховский — российский математик-педагог XIX в. Его «Теоретический и практический курс чистой математики» выдержал много изданий и в течение 40 лет был одним из самых распространённых пособий для школ того времени.

Рассмотрим самый распространённый способ задания функции: задание функции **с помощью формулы.**

Если в примере 1 независимую переменную обозначить буквой x, а зависимую — буквой y, указать область определения — множество всех чисел, то формула $y = 2x - 1$ задаёт вышеописанную функцию.

Понятно, что функцию из примера 2 задаёт формула $y = \frac{1}{x}$, где x — любое число, кроме 0.

Замечание. Если функция задана формулой, правая часть которой — целое выражение, и при этом не указана область определения, то считают, что областью определения такой функции является множество всех чисел.

Например, формулы $y = x^2$, $y = \frac{x-3}{5}$, $y = x^2 - x + 2$ задают функции, областью определения каждой из которых является множество всех чисел.

Если, например, функция задана формулой $y = x^3$, то говорят, что задана функция $y = x^3$.

Если хотят подчеркнуть, что, например, формула $y = 5 - \frac{x}{3}$ задаёт некоторую функцию f, то пишут $f(x) = 5 - \frac{x}{3}$.

Если хотят подчеркнуть, что, например, формула $s = 10t + 2$ задаёт функцию с аргументом t и зависимой переменной s, то пишут $s(t) = 10t + 2$.

Рассмотрим функцию $f(x) = x - 2x^2$, областью определения которой является множество $\left\{-1, 0, \frac{1}{2}, 1, 3\right\}$. Имеем:

$$f(-1) = -3;\ f(0) = 0;\ f\left(\frac{1}{2}\right) = 0;\ f(1) = -1;\ f(3) = -15.$$

Полученные результаты занесём в таблицу.

x	-1	0	$\frac{1}{2}$	1	3
$f(x)$	-3	0	0	-1	-15

Множество всех чисел, записанных в первой строке этой таблицы, является областью определения данной функции f. Таблица позволяет по указанному значению аргумента найти соответствующее значение функции. Следовательно, эта таблица — ещё один способ задания функции f. Его называют **табличным.**

Этот способ удобно использовать в тех случаях, когда область определения функции представляет собой множество, состоящее из нескольких чисел.

Пример 3. Функция задана формулой $y = 5x + 2$. Найдите значение аргумента, при котором значение функции равно 12.

Решение. Подставив в формулу $y = 5x + 2$ вместо y число 12, получаем уравнение $5x + 2 = 12$, откуда $x = 2$.

Ответ: 2. ■

Пример 4. Функция f задана таким образом: $f(x) = x + 7$, если $x \leqslant -1$, и $f(x) = 2$, если $x > -1$. Найдите значения функции f, соответствующие аргументам: 1) -2; 2) -1; 3) 1.

Решение. 1) Так как $-2 \leqslant -1$, то значение функции вычисляется по формуле $f(x) = x + 7$. Следовательно, $f(-2) = -2 + 7 = 5$.

2) Так как $-1 \leqslant -1$, то $f(-1) = -1 + 7 = 6$.

3) Так как $1 > -1$, то $f(1) = 2$.

Для задания данной функции используют форму записи с помощью фигурной скобки:

$$f(x) = \begin{cases} x + 7, \text{если } x \leqslant -1, \\ 2, \quad\quad \text{если } x > -1. \end{cases}$$ ■

Пример 5. Функции заданы формулами $y = 4x + 1$ и $y = 2x - 7$. При каком значении аргумента эти функции принимают равные значения?

Решение. Чтобы найти искомое значение аргумента, решим уравнение $4x + 1 = 2x - 7$.

Имеем:

$$4x - 2x = -7 - 1;$$
$$x = -4.$$

Ответ: при $x = -4$. ■

?

1. Что надо указать, чтобы функция считалась заданной?

2. Какие способы задания функции вы знаете?

Упражнения

24.1. Прочитайте следующую запись, укажите аргумент функции и зависимую переменную:

1) $s(t) = 70t$; 3) $V(a) = a^3$;

2) $y(x) = -2x + 4$; 4) $f(x) = x^2 - 4$.

24.2. Функция задана формулой $y = 10x + 1$. Найдите значение y, если:

1) $x = -1$; 2) $x = 3$; 3) $x = -\frac{1}{5}$; 4) $x = 7$.

24.3. Функция задана формулой $y = x^2 - 3$. Найдите значение y, если:
1) $x = 5$; 3) $x = 0{,}1$;
2) $x = -4$; 4) $x = 0$.

24.4. Функция задана формулой $y = -\frac{1}{6}x + 2$. Найдите:

1) значения функции для значений аргумента, равных 12; 6; –6; 0; 1; 2; –4; –3;
2) значение аргумента, при котором значение функции равно:
а) 4; б) 3; в) 0; г) –1.

24.5. Функция задана формулой $f(x) = 3 - 4x$. Верно ли равенство:
1) $f(-2) = -5$; 2) $f\left(\frac{1}{2}\right) = 1$; 3) $f(0) = -1$; 4) $f(-1) = 7$?

24.6. Функция задана формулой $f(x) = 2x - 1$.
1) Найдите $f(3)$, $f(-4)$, $f(0)$, $f(-0{,}5)$, $f(3{,}2)$.
2) Найдите значение x, при котором $f(x) = 7$, $f(x) = -9$, $f(x) = 0$, $f(x) = -2{,}4$.
3) Верно ли равенство: $f(5) = 9$, $f(0{,}3) = 0{,}4$, $f(-3) = -7$?

24.7. Функция задана формулой $y = x(x + 8)$. Заполните таблицу.

x	–3	–2	–1	0	1	2	3
y							

24.8. Функция задана формулой $y = -\frac{2}{3}x$. Заполните таблицу.

x	–9	–6	–3	–2	–1	0	1	2	3	6
y										

24.9. Каждому числу из множества натуральных чисел, которые больше 10 и меньше 20, поставили в соответствие остаток при делении этого числа на 6.
1) Каким способом задана эта функция?
2) Какова область значений этой функции?
3) Задайте эту функцию табличным способом.

24.10. Область определения некоторой функции — множество однозначных натуральных чисел, а значения функции в 2 раза больше соответствующих значений аргумента.
1) Каким способом задана эта функция?
2) Задайте эту функцию формулой и табличным способом.

24.11. Задайте формулой функцию, если значения функции:
1) противоположны соответствующим значениям аргумента;
2) равны утроенным соответствующим значениям аргумента;
3) на 4 больше квадратов соответствующих значений аргумента.

24.12. Задайте формулой функцию, если значения функции:
1) на 3 меньше соответствующего значения аргумента;
2) на 5 больше удвоенного значения соответствующего аргумента.

24.13. Составьте таблицу значений функции, заданной формулой $y = x^2 + 2x$, где $-1 \leqslant x \leqslant 3$, с шагом 0,5.

24.14. Составьте таблицу значений функции, заданной формулой $y = x^3 - 1$, где $-3 \leqslant x \leqslant 2$, с шагом 1.

24.15. Функция задана формулой $y = 0{,}2x - 5$. Заполните таблицу соответствующих значений x и y.

x	4		–1,5		–3
y		2		–1,4	

24.16. Дана функция $y = 8 - \frac{1}{7}x$. Заполните таблицу.

x	14		–1,4	
y		0		9

24.17. Даны функции $g(x) = \frac{20}{x} - 3$ и $h(x) = 8 - 3x$. Сравните:

1) $g(1)$ и $h(1)$; 2) $g(5)$ и $h(2)$; 3) $g(-2)$ и $h(6)$.

24.18. Дана функция $f(x) = \begin{cases} -2x + 1, & \text{если } x \leqslant -2, \\ x^2, & \text{если } -2 < x < 3, \\ 6, & \text{если } x \geqslant 3. \end{cases}$

Найдите: 1) $f(-3)$; 2) $f(-2)$; 3) $f(2)$; 4) $f(3)$; 5) $f(2{,}9)$; 6) $f(8{,}1)$.

24.19. Дана функция $f(x) = \begin{cases} x, & \text{если } -3 \leqslant x \leqslant 1, \\ 2x - 1, & \text{если } 1 < x < 2, \\ x^2 - 2, & \text{если } 2 \leqslant x \leqslant 3. \end{cases}$

Составьте таблицу значений функции для целых значений аргумента.

24.20. Найдите значения функции $y = \begin{cases} -2x + 4, \text{ если } x > 0, \\ 0{,}1x - 5, \text{ если } x \leqslant 0, \end{cases}$ соответствующие аргументам:

1) 3; 2) 0,001; 3) 0; 4) –8.

24.21. Функция задана с помощью таблицы.

x	2	4	6	8
y	5	7	9	11

1) Какие числа составляют область определения этой функции?
2) Задайте эту функцию описательно и формулой.

24.22. Функция задана с помощью таблицы.

x	1	3	5	7	9
y	0,5	1,5	2,5	3,5	4,5

1) Какие числа составляют область определения этой функции?
2) Задайте эту функцию описательно и формулой.

24.23. От квадратного листа картона размером 40×40 см отрезали полоску шириной x см (рис. 24.1). Запишите формулу, задающую функциональную зависимость площади S оставшейся полосы картона от x. Найдите область определения этой функции.

24.24. В углах квадратного листа жести размером 1×1 м вырезали квадраты со стороной x см (рис. 24.2) и из полученной заготовки согнули коробку в форме прямоугольного параллелепипеда. Запишите

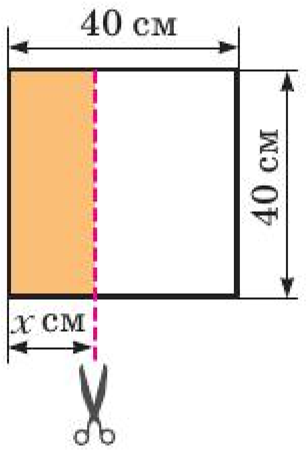


Рис. 24.1

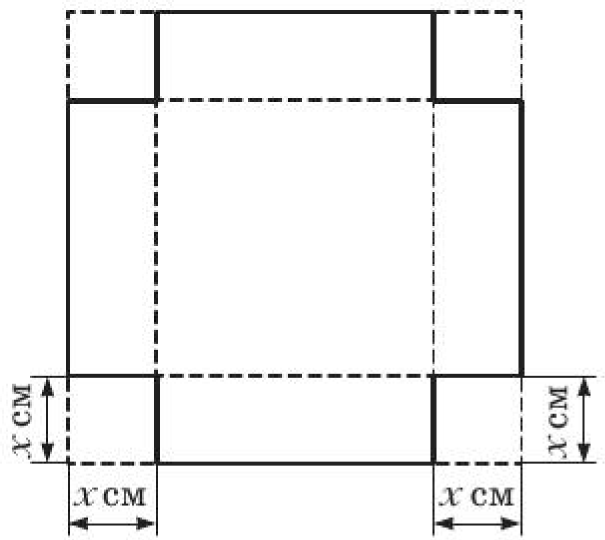


Рис. 24.2

формулу, задающую функциональную зависимость объёма V коробки от x. Найдите область определения этой функции.

24.25. Дана функция $f(x) = x^3$. Задайте формулой функцию, все значения которой при тех же значениях аргумента:

1) на 7 больше значений функции f;

2) равны кубу значений функции f.

24.26. Функции заданы формулами $y = x^2 - 8x$ и $y = 4 - 8x$. При каких значениях аргумента эти функции принимают равные значения?

24.27. Функция задана формулой $f(x) = 3x + 5$. При каком значении x значение функции равно значению аргумента?

24.28. Функция задана формулой $y = x^2 + 2x - 1$. При каких значениях x значение функции равно удвоенному значению аргумента?

24.29. Придумайте какую-нибудь функцию f, областью определения которой является множество натуральных чисел, а областью значений — множество $\{0, 1, 2, 3\}$. Найдите $f(9)$, $f(18)$, $f(39)$, $f(1000)$.

Упражнения для повторения

24.30. Какое из следующих уравнений: а) имеет один корень; б) имеет два корня; в) имеет бесконечно много корней; г) не имеет ни одного корня:

1) $3{,}4(1 + 3x) - 1{,}2 = 2(1{,}1 + 5{,}1x)$;

2) $|2x - 1| = 17{,}3$;

3) $3(|x - 1| - 6) + 21 = 0$;

4) $0{,}2(7 - 2x) = 2{,}3 - 0{,}3(x - 6)$?

24.31. Даны три числа, из которых каждое следующее на 10 больше предыдущего. Найдите эти числа, если произведение наибольшего и среднего из них на 320 больше произведения наибольшего и наименьшего из этих чисел.

24.32. Докажите, что если $a + c = 2b$, то $a^2 + 8bc = (2b + c)^2$.

24.33. Известно, что $x + y = \frac{a^2}{4}$, $y + z = -a$, $x + z = 1$. Докажите, что выражение $x + y + z$ принимает только неотрицательные значения.

§ 25 График функции

Рассмотрим функцию $y = x^2 - 4x$, где $-1 \leqslant x \leqslant 4$, т. е. областью определения этой функции является множество всех чисел от -1 до 4 включительно. Составим таблицу значений этой функции при целых значениях аргумента.

x	–1	0	1	2	3	4
y	5	0	–3	–4	–3	0

Рассмотрим пары чисел, записанные в каждом столбце этой таблицы, как координаты $(x; y)$ точек координатной плоскости. При этом значение аргумента является абсциссой точки, а соответствующее значение функции — её ординатой.

Эти точки изображены на рисунке 25.1.

Очевидно, что, придавая аргументу другие значения (отличные от целых) из области определения и находя соответствующие значения функции, можно отметить всё больше и больше точек на координатной плоскости (рис. 25.2, 25.3).

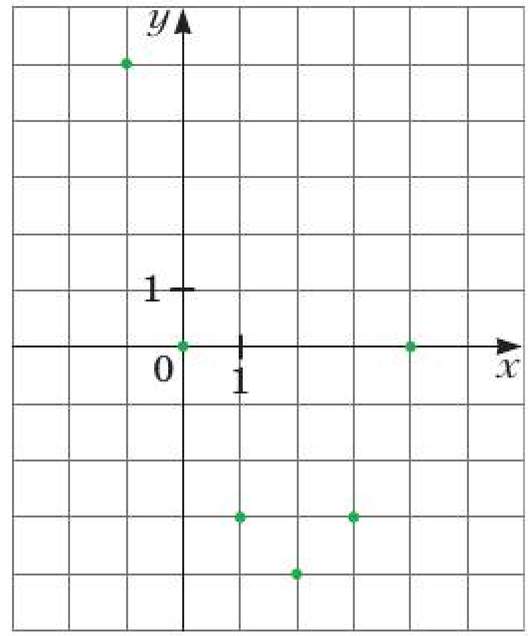


Рис. 25.1

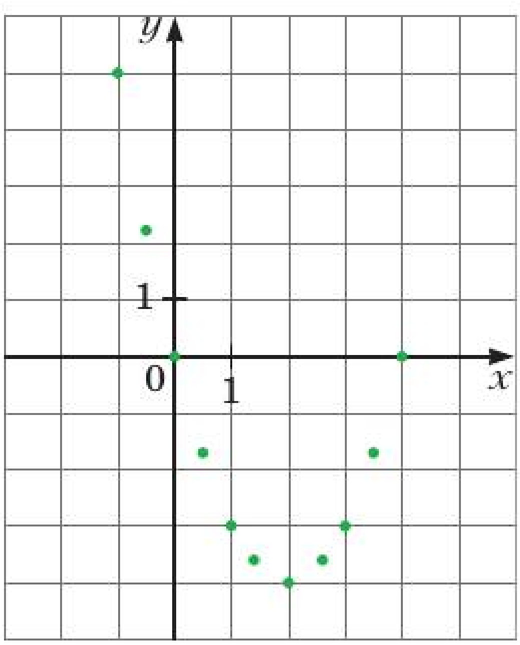


Рис. 25.2

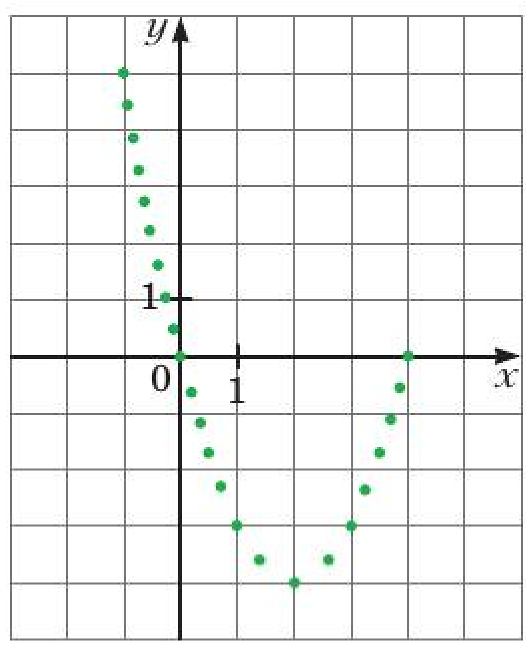


Рис. 25.3

Множество точек координатной плоскости, которые можно отметить, действуя таким способом, образует **график функции**.

Определение

Графиком функции f называют геометрическую фигуру, состоящую из всех тех и только тех точек координатной плоскости, абсциссы которых равны значениям аргумента, а ординаты — соответствующим значениям функции f.

Очевидно, что описанный метод построения графика функции $y = x^2 - 4x$ на практике реализовать невозможно. Ведь точек, которые следовало бы отметить, бесконечно много. Однако если отметить достаточно много точек, а затем соединить их плавной линией, то полученная кривая (рис. 25.4) будет тем меньше отличаться от искомого графика, чем больше точек мы отметим.

Поскольку описанный метод построения графика функции требует значительной технической работы, то существенную её часть может взять на себя компьютер. В настоящее время существует много программ, предназначенных для построения графиков. Так, на экране монитора (рис. 25.5) изображён график функции $y = x^3$, где $-2 \leqslant x \leqslant 2$.

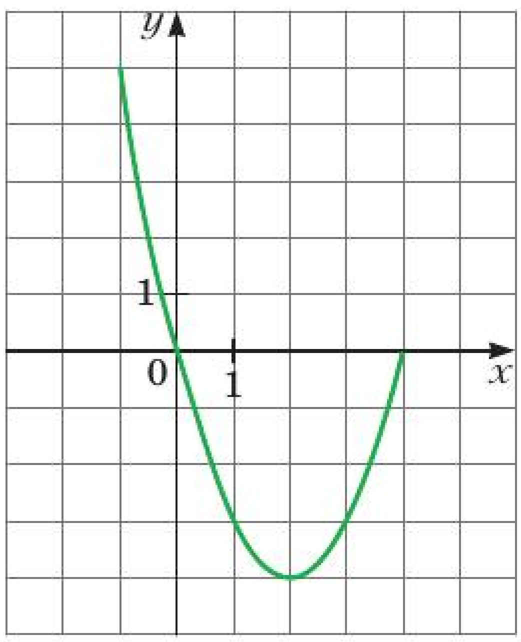


Рис. 25.4

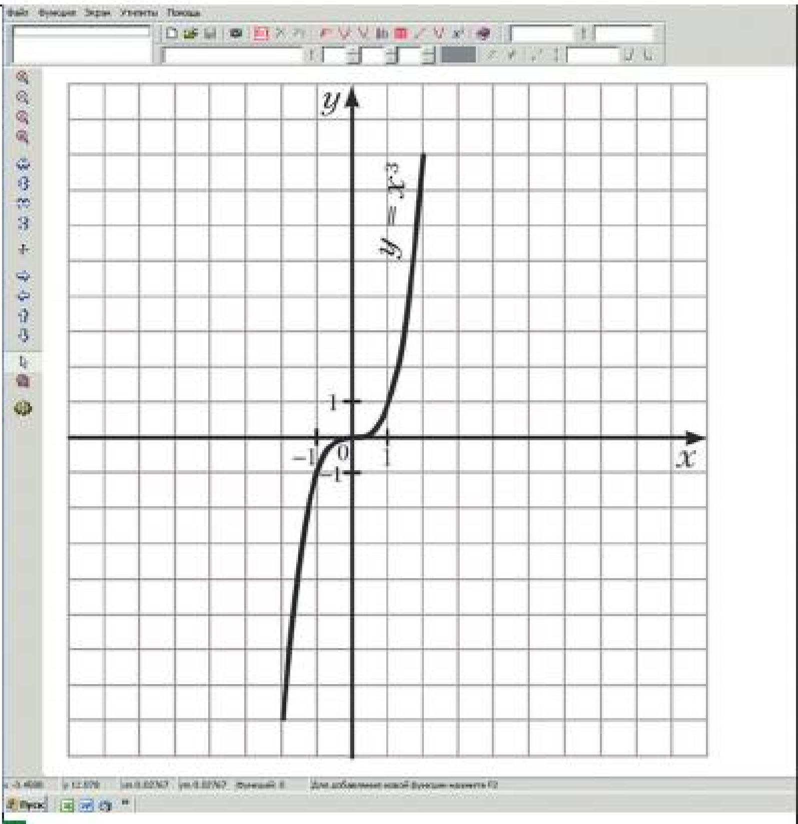


Рис. 25.5

Подчеркнём, что если какая-то фигура является графиком функции f, то выполняются два условия:

1) *если x_0 — некоторое значение аргумента, а $f(x_0)$ — соответствующее значение функции, то точка с координатами $(x_0; f(x_0))$ обязательно принадлежит графику*;

2) *если* $(x_0; y_0)$ — *координаты произвольно выбранной точки графика, то* x_0 *и* y_0 — *соответствующие значения независимой и зависимой переменных функции* f, *т. е.* $y_0 = f(x_0)$.

Графиком функции не обязательно является линия. На рисунке 25.6 изображён график функции, заданной таблицей.

x	1	–2
y	3	9

Он состоит из двух точек.

Рассмотрим пример построения графика функции, заданной описательно.

Область определения данной функции — множество всех чисел. Для каждого положительного аргумента значение функции равно 1; для каждого отрицательного аргумента значение функции равно –1; если аргумент равен нулю, то значение функции равно нулю.

График этой функции изображён на рисунке 25.7. Он состоит из трёх частей: точки O (0; 0) и двух лучей, у каждого из которых «выколото» начало.

Не всякая фигура, изображённая на координатной плоскости, может являться графиком функции. Например, окружность не может являться графиком функции. Здесь по заданному значению переменной x не всегда однозначно находится значение переменной y (рис. 25.8).

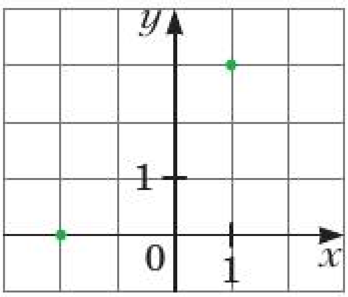


Рис. 25.6

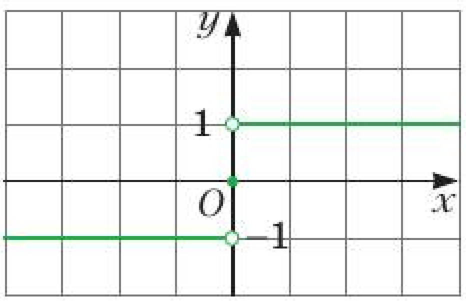


Рис. 25.7

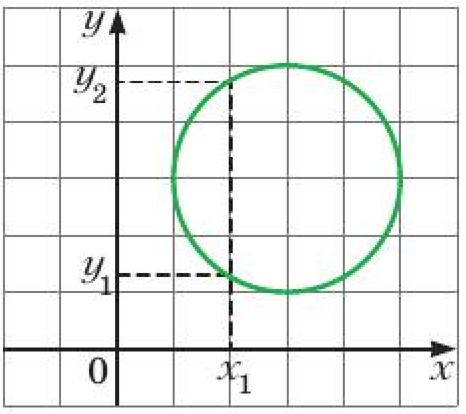


Рис. 25.8

Фигура, изображённая на координатной плоскости, может являться графиком функции, если любая прямая, перпендикулярная оси абсцисс, имеет с этой фигурой не более одной общей точки.

Пусть X — множество абсцисс точек такой фигуры. Можно говорить, что эта фигура задаёт функцию с областью определения X. Такой способ задания функции называют **графическим**.

Если функция f задана графически, то значение функции по заданному значению x_0 аргумента можно найти по следующему правилу: через точку $(x_0; 0)$ провести прямую, перпендикулярную оси абсцисс, а затем найти ординату точки пересечения этой прямой с графиком. Найденная ордината равна $f(x_0)$ (рис. 25.9).

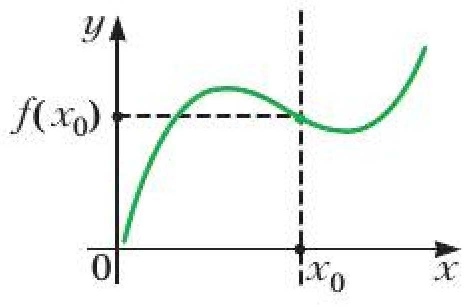


Рис. 25.9

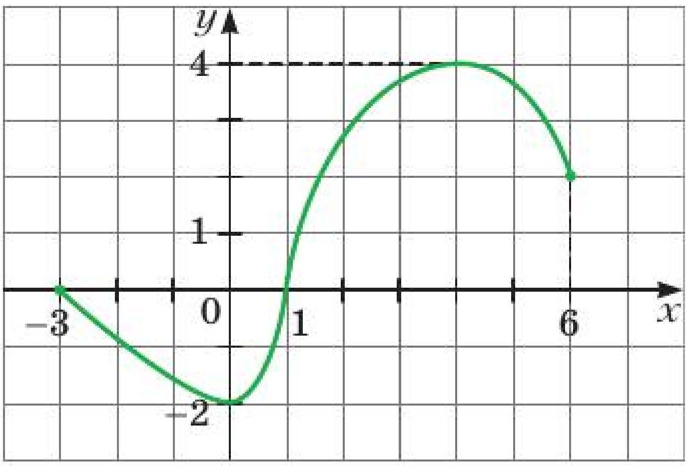


Рис. 25.10

Рисунок, схема, фотография какого-то объекта или процесса дают о нём наглядное представление. Ту же роль играет для функции её график. Изучая график функции, изображённый на рисунке 25.10, можно, например, найти:

1) область определения функции: множество чисел x таких, что $-3 \leqslant x \leqslant 6$;

2) область значений функции: множество чисел y таких, что $-2 \leqslant y \leqslant 4$;

3) значения аргумента, при которых значение функции равно нулю: $x = -3$ или $x = 1$;

4) значения аргумента, при которых функция принимает положительные значения: множество чисел x таких, что $1 < x \leqslant 6$;

5) значения аргумента, при которых функция принимает отрицательные значения: множество чисел x таких, что $-3 < x < 1$.

После изучения материала этого параграфа становится понятно, почему в технике, медицине, экономике и многих других сферах человеческой деятельности так широко используются компьютерные программы, которые позволяют строить графики различных функциональных зависимостей.

Пример 1. Принадлежит ли графику функции, заданной формулой $y = x - 6$, точка: 1) A (8; 2); 2) B (2; 4)?

Решение. Чтобы установить, принадлежит ли точка графику функции, найдём значение функции при значении аргумента, равном абсциссе данной точки. Если значение функции будет равно ординате данной точки, то точка принадлежит графику, в противном случае — не принадлежит.

1) При $x = 8$ имеем $y = 8 - 6 = 2$. Следовательно, точка A принадлежит графику данной функции.

2) При $x = 2$ имеем $y = 2 - 6 = -4 \neq 4$. Значит, точка B не принадлежит графику функции $y = x - 6$. ■

Пример 2. Не выполняя построения, найдите координаты точек пересечения графика функции $y = x^2 - 4$ с осями координат.

Решение. Точка принадлежит оси абсцисс тогда и только тогда, когда её ордината равна нулю. Поэтому для нахождения координат точки пересечения графика данной функции с осью абсцисс надо решить уравнение $x^2 - 4 = 0$. Числа -2 и 2 являются его корнями. Следовательно, график данной функции имеет с осью абсцисс две общие точки: A (2; 0) и B (–2; 0).

Точка принадлежит оси ординат тогда и только тогда, когда её абсцисса равна нулю. Поэтому для нахождения координат точки пересечения графика функции с осью ординат надо найти значение данной функции при $x = 0$. Имеем $y = -4$. Следовательно, график функции пересекает ось ординат в точке C (0; –4). ■

Пример 3. Функция f, областью определения которой являются все числа, обладает следующими свойствами. Для любого x:

1) $f(x)$ — целое число;
2) $f(x) \leqslant x$;
3) $f(x) > x - 1$.

Найдите $f(3{,}2)$, $f(5)$, $f(-3{,}2)$. Найдите область значений функции f. Постройте её график.

Решение. Из свойств 1–3 следует, что функция f — это правило, по которому каждому числу x ставится в соответствие наибольшее целое число, не превосходящее x. Отсюда, например, $f(3{,}2) = 3$, $f(-3{,}2) = -4$. Понятно, что $f(5) = 5$, $f(-2) = -2$, $f(0) = 0$. Вообще, для любого целого числа c имеет место равенство $f(c) = c$. Из этого следует, что областью значений функции f являются все целые числа.

Построим график функции f.

Пусть $0 \leqslant x < 1$, тогда $f(x) = 0$.

Пусть $1 \leqslant x < 2$, тогда $f(x) = 1$.

Пусть $2 \leqslant x < 3$, тогда $f(x) = 2$.

Пусть $-1 \leqslant x < 0$, тогда $f(x) = -1$.

Пусть $-2 \leqslant x < -1$, тогда $f(x) = -2$.

Вообще, если $m \leqslant x < m + 1$, где m — целое число, то $f(x) = m$.

График функции f изображён на рисунке 25.11.

Для этой функции используют обозначение $f(x) = [x]$. Запись $[x]$ читают: **«целая часть числа x»**. ■

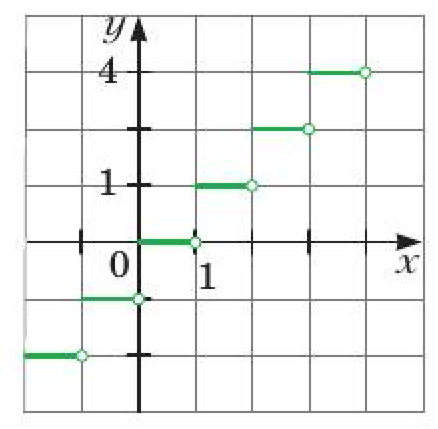


Рис. **25.11**

Пример 4. Известно, что точка $A(x_0; y_0)$ принадлежит графику функции $y = f(x)$. Докажите, что точка $B(x_0 - 5; y_0)$ принадлежит графику функции $y = f(x + 5)$.

Решение. Так как точка $A(x_0; y_0)$ принадлежит графику функции $y = f(x)$, то значение этой функции при $x = x_0$ равно y_0, т. е. $f(x_0) = y_0$.

Найдём значение функции $y = f(x + 5)$ при $x = x_0 - 5$. Имеем: $f(x_0 - 5 + 5) = f(x_0) = y_0$.

Отсюда получаем, что точка $B(x_0 - 5; y_0)$ принадлежит графику функции $y = f(x + 5)$. ■

?

1. Что называют графиком функции?
2. Какие два условия должны выполняться, чтобы фигура была графиком функции f?
3. Может ли график функции состоять из одной точки?
4. Всякая ли фигура может являться графиком функции?
5. Приведите пример фигуры, которая не может являться графиком функции.
6. Сколько общих точек может иметь с графиком функции любая прямая, перпендикулярная оси абсцисс?

Упражнения

25.1. Пользуясь графиком функции $y = f(x)$, изображённым на рисунке 25.12, заполните таблицу.

x	–2	–1	0	1	2	3	4	5	6
$f(x)$									

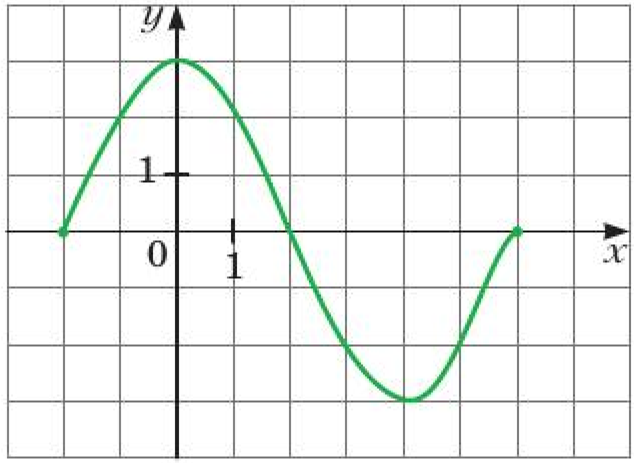


Рис. **25.12**

25.2. На рисунке 25.13 изображён график некоторой функции. Пользуясь графиком, найдите:

1) значение y, если $x = -3{,}5$; $-1{,}5$; 2; 4;

2) значения x, которым соответствуют значения $y = -3$; $-1{,}5$; 2;

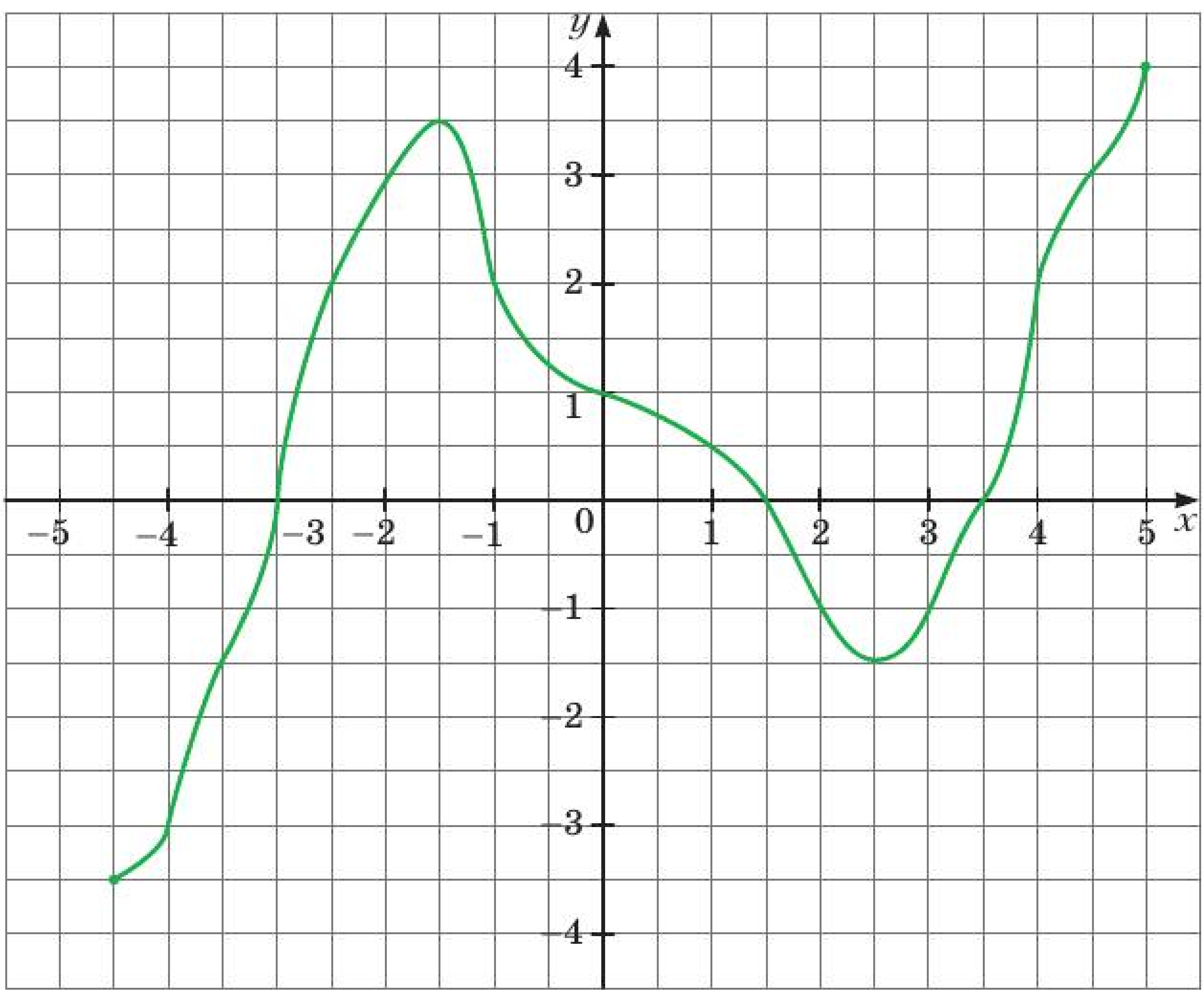


Рис. **25.13**

3) значения аргумента, при которых значение функции равно нулю;

4) область определения и область значений функции;

5) значения аргумента, при которых значения функции положительные;

6) значения аргумента, при которых значения функции отрицательные.

25.3. На рисунке 25.14 изображён график функции $y = f(x)$. Пользуясь графиком, найдите:

1) $f(-4)$, $f(-2{,}5)$, $f(0{,}5)$, $f(2)$;

2) значения x, при которых $f(x) = 2{,}5$; $f(x) = 1$; $f(x) = 0$;

3) область определения и область значений функции;

4) значения аргумента, при которых значения функции положительные;

5) значения аргумента, при которых значения функции отрицательные.

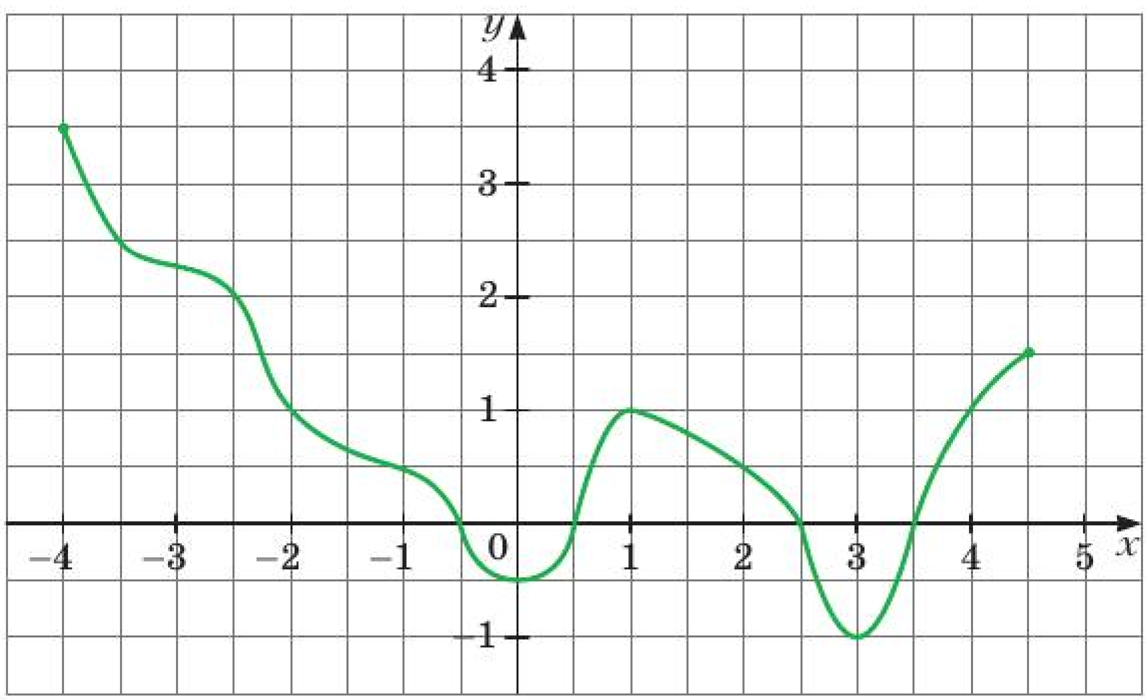


Рис. **25.14**

25.4. Принадлежит ли графику функции $y = x^2 + 2$ точка:

1) $A\ (0;\ 2)$; 2) $B\ (-1;\ 1)$; 3) $C\ (-2;\ 6)$; 4) $D\ (-3;\ -7)$?

25.5. Назовите координаты нескольких точек, принадлежащих графику функции:

1) $y = 7x - 4$; 2) $y = x^2 + 1$; 3) $y = 4 - |x|$.

25.6. Принадлежит ли графику функции $y = -\frac{x}{3}$ точка:

1) $A\ (9;\ -3)$; 2) $B\ (6;\ 2)$; 3) $C\ (-1;\ 3)$; 4) $D\ (-12;\ 4)$?

25.7. Какие из фигур, изображённых на рисунке 25.15, могут быть графиком функции?

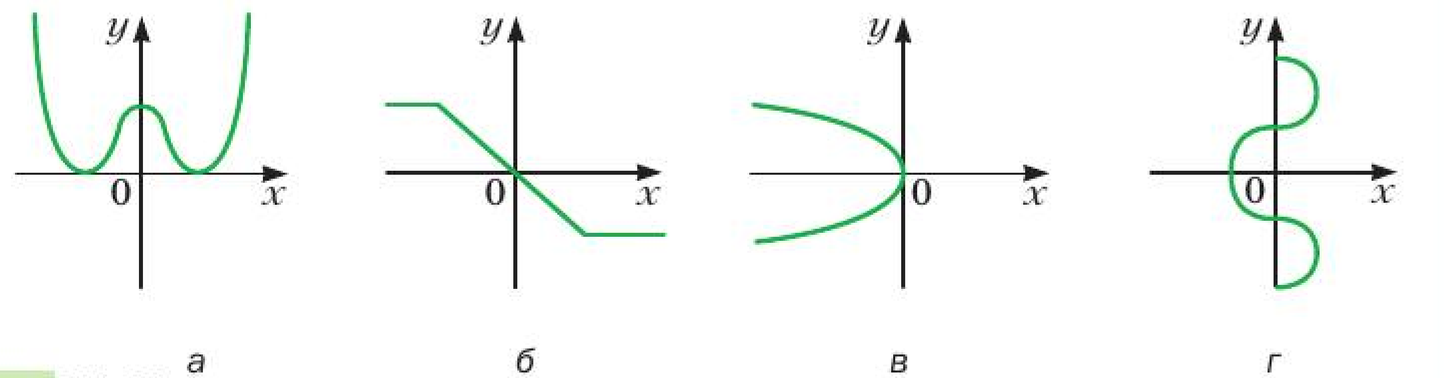


Рис. 25.15

25.8. Какие из фигур, изображённых на рисунке 25.16, могут быть графиком функции?

Рис. 25.16

25.9. На каком из рисунков (рис. 25.17) задана функциональная зависимость:

1) переменной y от переменной x;
2) переменной x от переменной y;
3) переменной y от переменной x и переменной x от переменной y?

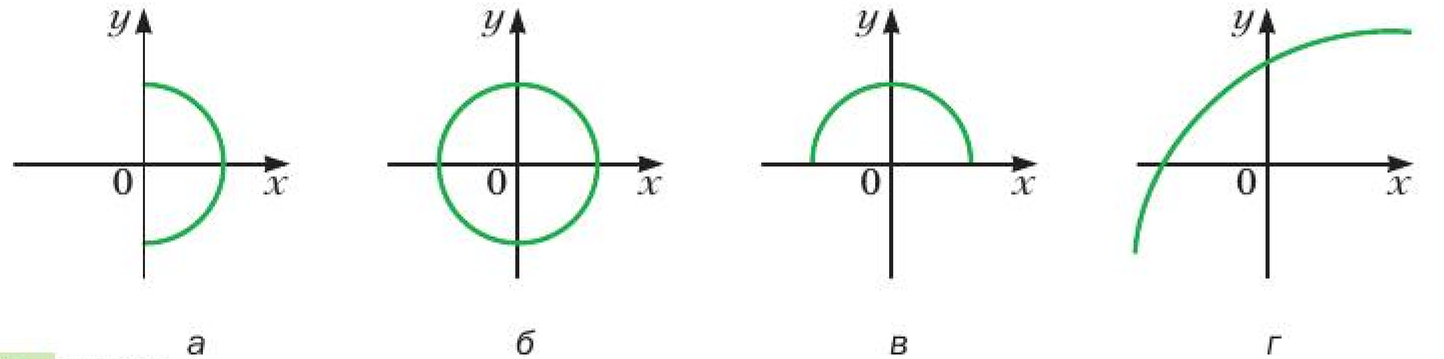


Рис. 25.17

25.10. Графиком некоторой функции является ломаная $ABCD$ с вершинами в точках A (–3; 6), B (–1; 2), C (3; –2), D (9; 0).

1) Постройте график данной функции.

2) Найдите значение функции, если значение аргумента равно: –2; 0; 2; 6.

3) Найдите значение аргумента, при котором значение функции равно: 1; –1; 0.

25.11. Может ли ломаная ABC быть графиком некоторой функции, если:

1) A (–4; –1), B (1; 2), C (2; 4);

2) A (–4; –1), B (1; 2), C (1; 3)?

25.12. Графиком некоторой функции является ломаная MKE, где M (–4; 1), K (2; 4), E (5; –2).

1) Постройте график данной функции.

2) Найдите значение функции, если значение аргумента равно: –2; 0; 3.

3) Найдите значение x, при котором $y = -2$; 0; 2.

25.13. Функция задана формулой $y = x^2 - 1$, где $-2 \leqslant x \leqslant 3$.

1) Составьте таблицу значений функции с шагом 1.

2) Постройте график функции, пользуясь составленной таблицей.

3) Пользуясь графиком, найдите, при каких значениях аргумента значения функции меньше нуля и при каких — больше нуля.

4) Пользуясь графиком функции, укажите область значений функции.

25.14. Функция задана формулой $y = 4 - x^2$, где $-3 \leqslant x \leqslant 2$.

1) Составьте таблицу значений функции с шагом 1.

2) Постройте график функции, пользуясь составленной таблицей.

3) Пользуясь графиком, найдите, при каких значениях аргумента значения функции меньше нуля и при каких — больше нуля.

4) Пользуясь графиком функции, укажите область значений функции.

25.15. Значение функции $y = f(x)$ равно 0 при значениях аргумента, равных –5 и 4. Какое из следующих утверждений верно:

1) график функции имеет с осью ординат две общие точки (0; –5) и (0; 4);

2) график функции имеет с осью абсцисс две общие точки (–5; 0) и (4; 0)?

25.16. Не выполняя построения, найдите координаты точек пересечения с осями координат графика функции:

1) $y = x^2 - 16x$;
3) $y = x^3 - 9x$;
5) $y = |x| + 3$.
2) $y = |x| - 2$;
4) $y = 0{,}8x$;

25.17. Не выполняя построения, найдите координаты точек пересечения с осями координат графика функции:

1) $y = 36 - 9x$; 2) $y = x^2 + x$; 3) $y = 49 - x^2$; 4) $y = |x| - 3$.

25.18. Задана функция $y = 1 - x$, областью определения которой является множество всех однозначных натуральных чисел. Постройте график этой функции.

25.19. Постройте график функции $f(x) = 1{,}5x + 1$, областью определения которой является множество целых чисел, удовлетворяющих неравенству $-4 \leqslant x \leqslant 2$.

◆ ◆ ◆

25.20. Каждой абсциссе точки графика функции $f(x) = 3x + 1$ ставится в соответствие сумма координат этой точки. Является ли это правило функцией? В случае утвердительного ответа задайте эту функцию формулой.

25.21. Каждой абсциссе точки графика функции $f(x) = x^2 + 1$ ставится в соответствие произведение координат этой точки. Является ли это правило функцией? В случае утвердительного ответа задайте эту функцию формулой.

25.22. Известно, что точка $A(x_0; y_0)$ принадлежит графику функции $y = f(x)$. Докажите, что точка $B(x_0; y_0 - 3)$ принадлежит графику функции $y = f(x) - 3$.

25.23. Известно, что точка $A(x_0; y_0)$ принадлежит графику функции $y = f(x)$. Докажите, что точка $B(x_0; 2y_0)$ принадлежит графику функции $y = 2f(x)$.

25.24. Известно, что точка $A(x_0; y_0)$ принадлежит графику функции $y = f(x)$. Докажите, что точка $B(2x_0; y_0)$ принадлежит графику функции $y = f\left(\frac{1}{2}x\right)$.

25.25. Постройте график функции, областью определения которой является множество натуральных чисел и которая принимает значение 1 при чётных значениях аргумента и значение –1 при нечётных значениях аргумента.

25.26. Постройте график функции, если известно, что для всех целых значений аргумента значение функции равно 1, а для нецелых равно –1.

Упражнения для повторения

25.27. Упростите выражение:

1) $(c + 2)(c - 3) - (c + 1)(c + 3)$;
2) $(p + 4)(p - 11) + (p + 6)^2$;
3) $3(x - 5)^2 - (8x^2 - 10x)$;
4) $7(2y - 5)^2 - 2(7y - 1)^2$.

25.28. Докажите тождество:

1) $(4a^2 + 3)^2 + (7 - 4a^2)^2 - 2(4a^2 + 3)(4a^2 - 7) = 100$;

2) $(a^2 - 6ab + 9b^2)(a^2 + 6ab + 9b^2) - (a^2 - 9b^2)^2 = 0$.

25.29. Докажите, что при любом нечётном значении n значение выражения $(4n + 1)^2 - (n + 4)^2$ кратно 120.

25.30. Найдите какие-нибудь три натуральных значения переменной x таких, чтобы выражение $a^2 - 2x$ можно было разложить на множители по формуле разности квадратов. Полученные выражения разложите на множители.

25.31. (*Задача Бхаскары II*[1].) Есть кадамба цветок; на один лепесток пчёлок пятая часть села. Рядом росла вся в цвету симендга, и на ней третья часть разместилась. Разность их ты найди, затем трижды её сложи, на кумай этих пчёл посади. Только пчёлка одна не нашла себе места нигде, всё летала туда и сюда, запахом цветов наслаждалась. И скажи мне теперь, сколько пчёлок всего здесь собралось?

§ 26 Линейная функция, её график и свойства

Рассмотрим два примера.

Пример 1. В бассейне было 200 л воды. В течение t мин в бассейн каждую минуту поступало 80 л воды. Тогда объём V воды в бассейне вычисляется по формуле

$$V = 80t + 200, \text{ где } t \geqslant 0.$$

Эта формула задаёт функциональную зависимость переменной V от переменной t. ■

Пример 2. Первая бригада собрала 25 ящиков яблок, а каждый рабочий второй бригады собрал по 2 ящика.

Пусть во второй бригаде было x рабочих. Обозначим число всех ящиков, собранных двумя бригадами, буквой y. Тогда зависимость переменной y от переменной x выражается формулой

$$y = 2x + 25, \text{ где } x \text{ — натуральное число.}$$ ■

В этих примерах мы сконструировали функции, описывающие две разные реальные ситуации. Однако эти функции похожи тем, что формулы, их задающие, имеют вид $y = kx + b$.

---

[1] Бхаскара II (1114–1185) — индийский математик и астроном, автор трактата «Венец системы» (ок. 1150 г.), в котором содержится изложение методов решения ряда алгебраических задач.

Определение

Функцию, которую можно задать формулой вида $y = kx + b$, где k и b — некоторые числа, x — независимая переменная, называют линейной.

Примеры линейных функций:

$$y = -2x + 1;\ y = 1 - x;\ y = 5x;\ y = 2.$$

Заметим, что *областью определения линейной функции является множество всех чисел*.

Построим график функции $y = -2x + 1$.

Составим таблицу значений этой функции для некоторых значений аргумента.

x	–3	–2	–1	0	1	2	3
y	7	5	3	1	–1	–3	–5

Точки A (–3; 7); B (–2; 5); C (–1; 3); D (0; 1); E (1; –1); F (2; –3); G (3; –5) принадлежат искомому графику (рис. 26.1). Все эти точки лежат на одной прямой, которая и является графиком функции $y = -2x + 1$ (рис. 26.2).

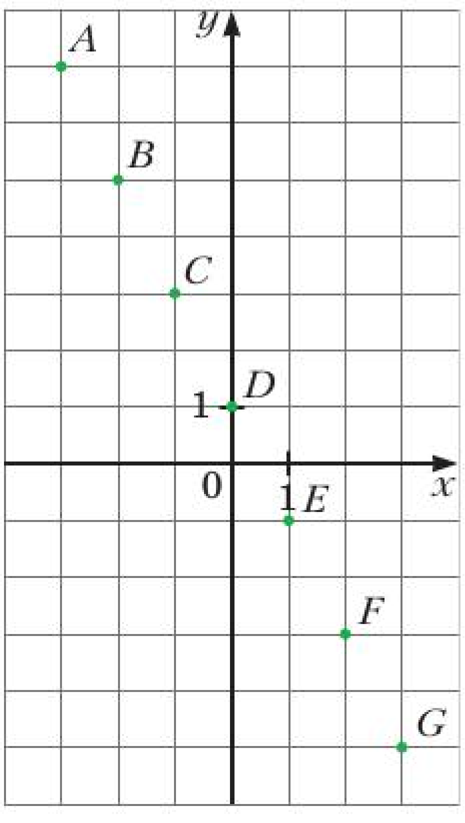


Рис. 26.1

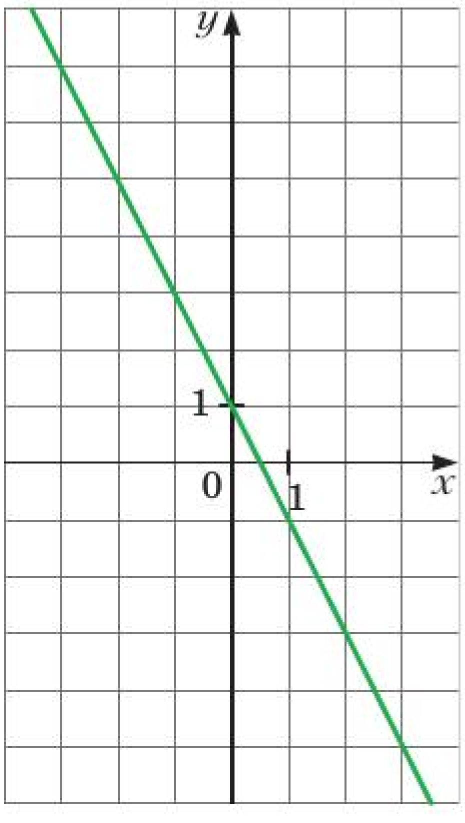


Рис. 26.2

В курсе геометрии 9 класса вы докажете, что ***графиком линейной функции является прямая***.

Заметим, что эта прямая не может быть вертикальной, т. е. прямой, перпендикулярной оси абсцисс. Действительно, вертикальная прямая не может служить графиком функции (см. замечание в § 25).

Поскольку прямая однозначно задаётся любыми двумя своими точками, то для построения графика линейной функции достаточно выбрать два произвольных значения аргумента и составить таблицу значений функции.

Пример 3. Постройте график функции $y = -3x + 2$.

Решение. Составим таблицу значений данной функции для двух произвольных значений аргумента.

x	0	1
y	2	–1

Отметим на координатной плоскости точки (0; 2) и (1; –1) и проведём через них прямую (рис. 26.3). Эта прямая является графиком линейной функции $y = -3x + 2$. ■

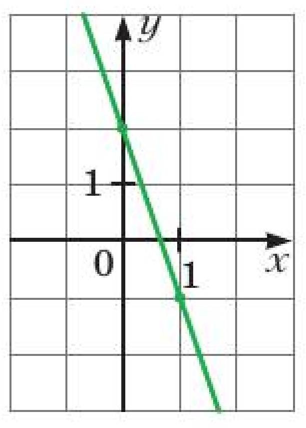


Рис. 26.3

В формуле $y = kx + b$, задающей линейную функцию, не исключены случаи, когда $k = 0$ или $b = 0$.

Рассмотрим случай, когда $b = 0$ и $k \neq 0$. Тогда формула принимает вид $y = kx$. Отсюда для всех не равных нулю значений аргумента можно записать, что $\frac{y}{x} = k$. Эта формула показывает, что для функции $y = kx$, где $x \neq 0$, отношение соответствующих значений зависимой и независимой переменных остаётся постоянным и равно k.

Напомним, что в курсе математики 6 класса вы уже познакомились с подобными зависимостями между величинами. Такую зависимость называют прямой пропорциональностью. Поэтому линейную функцию, которую задают формулой $y = kx$, где $k \neq 0$, называют **прямой пропорциональностью**.

Функции $y = 2x$, $y = x$, $y = -x$, $y = -\frac{1}{3}x$ — примеры прямых пропорциональностей.

Поскольку прямая пропорциональность — частный случай линейной функции (это иллюстрирует схема на рисунке 26.4), *то её график — прямая.* Особенностью этой прямой является то, что она при любом k проходит через точку O (0; 0). Действительно, если в формуле $y = kx$ положить $x = 0$, то получим $y = 0$. Поэтому для построения графика прямой пропорциональности достаточно указать какую-нибудь точку графика, отличную от начала координат, и провести прямую через эту точку и точку O (0; 0).

Рис. 26.4

На рисунке 26.5 изображены графики прямых пропорциональностей, которые приводились выше в качестве примеров.

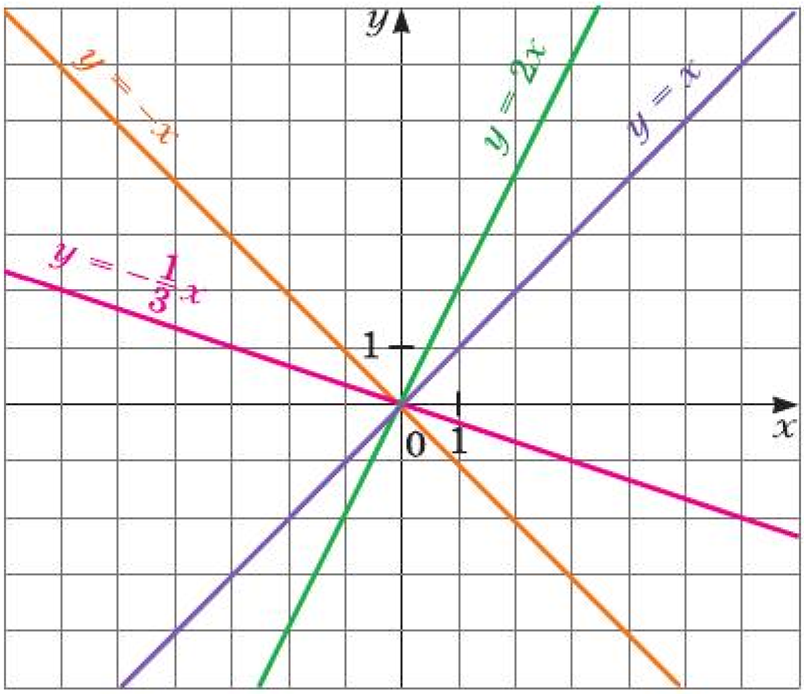


Рис. 26.5

Рассмотрим ещё один частный случай линейной функции.

В формуле $y = kx + b$ положим $k = 0$. Получим $y = b$. Ясно, что в этом случае значения функции будут оставаться неизменными при любых изменениях значений аргумента.

Пример 4. Постройте график функции $y = 2$.

Решение. Как и для построения графика любой линейной функции, нужно знать две принадлежащие ему точки. Эти точки будут иметь одинаковые ординаты, равные 2. Их абсциссы выберем произвольно, например равные –2 и 0. Проведём прямую через точки $A\ (-2;\ 2)$ и $B\ (0;\ 2)$ (рис. 26.6). Эта прямая параллельна оси абсцисс. ■

Заметим, что *графиком функции $y = 0$ является ось абсцисс. Графиком функции $y = b$, где $b \neq 0$, является прямая, параллельная оси абсцисс.*

Пример 5. Задайте формулой линейную функцию, график которой изображён на рисунке 26.7.

Решение. График данной функции пересекает ось ординат в точке (0; 4). Подставив координаты этой точки в формулу $y = kx + b$, получаем $4 = k \cdot 0 + b$, откуда $b = 4$.

Так как данный график пересекает ось абсцисс в точке (3; 0), то, подставив её координаты в формулу $y = kx + 4$, получим: $3k + 4 = 0$; $k = -\frac{4}{3}$.

Ответ: $y = -\frac{4}{3}x + 4$. ■

Пример 6. На рисунке 26.8 изображён график функции $f(x) = ax + b$. Найдите значение выражения $b - a$.

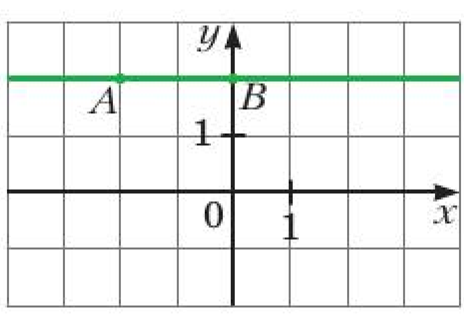


Рис. 26.6

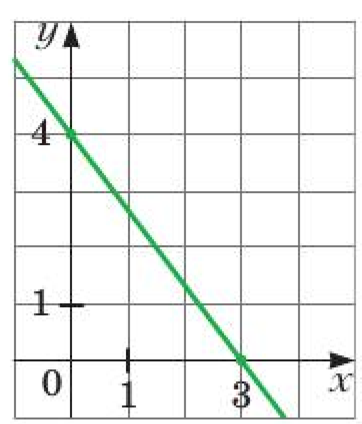


Рис. 26.7

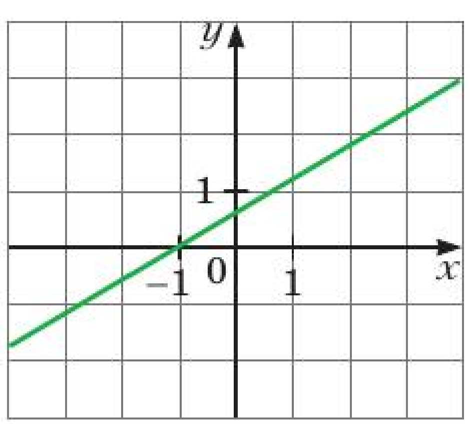


Рис. 26.8

Решение. Имеем: $f(-1) = a \cdot (-1) + b = b - a$. По графику определяем, что $f(-1) = 0$. Следовательно, $b - a = 0$. ■

? **1.** Какую функцию называют линейной?
2. Что является графиком линейной функции?
3. Какую функцию называют прямой пропорциональностью?
4. Что является графиком прямой пропорциональности?
5. Что является графиком функции $y = b$?

6. Графиком какой функции является ось абсцисс?

7. Существует ли функция, графиком которой является ось ординат?

Упражнения

26.1. Является ли линейной функция, заданная формулой:

1) $y = 3x - 2$;   4) $y = \frac{3}{x} + 2$;   7) $y = \frac{x}{5}$;

2) $y = 8 - 7x$;   5) $y = 2x^2 + 4$;   8) $y = -4$;

3) $y = \frac{x}{3} + 2$;   6) $y = \frac{12x - 8}{4}$;   9) $y = 0$?

В случае утвердительного ответа укажите значения коэффициентов k и b.

26.2. Является ли прямой пропорциональностью функция, заданная формулой:

1) $y = 4x$;   3) $y = \frac{x}{4}$;   5) $y = -4x$;

2) $y = \frac{4}{x}$;   4) $y = 0$;   6) $y = -\frac{x}{4}$?

В случае утвердительного ответа укажите значение коэффициента k.

26.3. Линейная функция задана формулой $y = 6x - 5$. Заполните таблицу.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y							

26.4. Функция задана формулой $y = -2x + 5$. Найдите:

1) значение функции, если значение аргумента равно: -4; $3,5$; 0;

2) значение аргумента, при котором значение функции равно: 9; -5; 0.

26.5. Функция задана формулой $y = 0,3x - 2$. Найдите:

1) значение функции, если значение аргумента равно: 5; -2; 0;

2) значение аргумента, при котором значение функции равно: 1; -11; $0,8$.

26.6. Постройте график функции:

1) $y = x - 5$;   3) $y = -\frac{1}{6}x - 2$;

2) $y = 3x + 1$;   4) $y = 0,4x + 3$.

26.7. Постройте график функции:

1) $y = 4 - x$;   2) $y = -4x + 5$;   3) $y = 0,2x - 3$.

26.8. Функция задана формулой $y = \frac{1}{3}x$. Найдите:

1) значение y, если $x = 6; -3; -3{,}2$;

2) значение x, при котором $y = -2; \frac{1}{3}; 12$.

26.9. Функция задана формулой $y = 1{,}2x$. Найдите:

1) значение y, если $x = 10; 0{,}6; -5; -4$;

2) значение x, при котором $y = 3{,}6; -2{,}4; 6$.

26.10. Постройте график прямой пропорциональности:

1) $y = 3x$; 2) $y = -2x$; 3) $y = -0{,}6x$; 4) $y = \frac{1}{7}x$.

26.11. Постройте график функции:

1) $y = 5x$; 2) $y = 0{,}8x$; 3) $y = -\frac{1}{6}x$.

26.12. Функциональная зависимость переменной y от переменной x является прямой пропорциональностью.

1) Заполните таблицу.

x	8	6	2	1	$\frac{1}{2}$	0	–1	–2	–3	–4
y	4									

2) Задайте данную функцию формулой.

3) Постройте график этой функции.

26.13. Постройте в одной системе координат графики линейных функций: $y = 3$; $y = -5$; $y = 0$.

26.14. Постройте график функции $y = 2x - 3$. Пользуясь графиком, найдите:

1) значение функции, если значение аргумента равно: $4; -1; 0{,}5$;

2) значение аргумента, при котором значение функции равно: $1; -1; 0$;

3) значения аргумента, при которых функция принимает положительные значения.

26.15. Постройте график функции $y = 2 - 3x$. Пользуясь графиком, найдите:

1) значение функции, если значение аргумента равно: $1; 0; -2$;

2) значение аргумента, при котором значение функции равно: $-4; -1; 5$;

3) значения аргумента, при которых функция принимает отрицательные значения.

26.16. Постройте график функции $y = 0{,}5x$. Пользуясь графиком, найдите:

1) значение функции, если значение аргумента равно: 4; –6; 3;

2) значение аргумента, при котором значение функции равно: 2,5; –2; 1;

3) значения аргумента, при которых функция принимает отрицательные значения.

26.17. Постройте график функции $y = -4x$. Пользуясь графиком, найдите:

1) значение функции, если значение аргумента равно: 2; –1; 0,5;

2) значение аргумента, при котором значение функции равно: –4; 2;

3) значения аргумента, при которых функция принимает положительные значения.

26.18. Не выполняя построения графика функции $y = 1{,}8x - 3$, определите, через какие из данных точек проходит этот график: A (–2; –6,6); B (1; 1,2); C (0; –3); D (5; 7).

26.19. Не выполняя построения, определите, принадлежит ли графику функции $y = 8x - 14$ точка:

1) A (–1; –6);   2) B (2; 2).

26.20. Постройте в одной системе координат графики функций $y = x - 1$ и $y = \frac{1}{4}x + 2$ и найдите координаты точки их пересечения.

26.21. Постройте в одной системе координат графики функций $y = 5x - 6$ и $y = -2x + 1$ и найдите координаты точки их пересечения.

26.22. Не выполняя построения, найдите координаты точек пересечения с осями координат графика функции:

1) $y = 2{,}5x + 10$;   2) $y = 6x - 4$.

26.23. Не выполняя построения, найдите координаты точек пересечения с осями координат графика функции:

1) $y = \frac{2}{3}x - 4$;   2) $y = 7 - 3x$.

26.24. Не выполняя построения графика функции $y = 2x - 9$, найдите точку этого графика, у которой:

1) абсцисса равна ординате;

2) ордината на 6 больше абсциссы.

26.25. Не выполняя построения графика функции $y = -7x + 8$, найдите точку этого графика, у которой абсцисса и ордината — противоположные числа.

26.26. Не выполняя построения, найдите координаты точек пересечения графиков функций:

1) $y = 3{,}7x + 10$ и $y = 1{,}4x - 13$; 2) $y = 4 - \frac{2}{7}x$ и $y = \frac{9}{7}x + 26$.

26.27. Не выполняя построения, найдите координаты точек пересечения графиков функций $y = 4x - 7$ и $y = -2x + 11$.

26.28. При каком значении переменной x функции $f(x) = 4x - 3$ и $g(x) = 3x - 2$ принимают равные значения? Постройте на одной координатной плоскости графики функций f и g. Определите, при каких значениях x:

1) $f(x) > g(x)$; 2) $f(x) < g(x)$.

26.29. При каком значении независимой переменной функции $f(x) = 5 - 2x$ и $g(x) = 2x - 3$ принимают равные значения? Построив на одной координатной плоскости графики данных функций, установите, при каких значениях x:

1) $f(x) < g(x)$; 2) $f(x) > g(x)$.

26.30. Задайте формулой функцию, являющуюся прямой пропорциональностью, если её график проходит через точку M (2; –5).

26.31. Задайте формулой функцию, являющуюся прямой пропорциональностью, если её график проходит через точку M (3; –2).

26.32. Найдите значение b, при котором график функции $y = -\frac{1}{9}x + b$ проходит через точку A (–27; 4).

26.33. При каком значении k график функции $y = kx - 15$ проходит через точку B (3; –6)?

26.34. График функции $y = kx + b$ пересекает оси координат в точках C (0; 4) и D (–8; 0). Найдите значения k и b.

26.35. График функции $y = kx + b$ пересекает оси координат в точках M (3; 0) и K (0; –1). Найдите значения k и b.

26.36. Все точки графика функции $y = kx + b$ имеют одинаковую ординату, равную –6. Найдите значения k и b.

26.37. График функции $y = kx + b$ параллелен оси абсцисс и проходит через точку A (–2; 3). Найдите значения k и b.

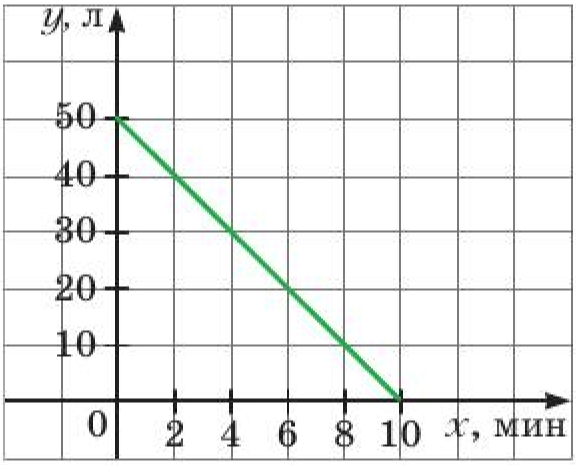
26.38. Один из графиков на рисунке 26.9 отображает процесс наполнения одного бака водой, а другой — вытекания воды из другого бака.

1) Каким процессам соответствуют графики на рисунке 26.9?

2) Сколько воды было сначала в каждом баке?

3) Сколько воды было в каждом баке через 2 мин после открытия кранов? Через 6 мин?

4) Через сколько минут после открытия кранов в каждом баке было по 30 л воды?



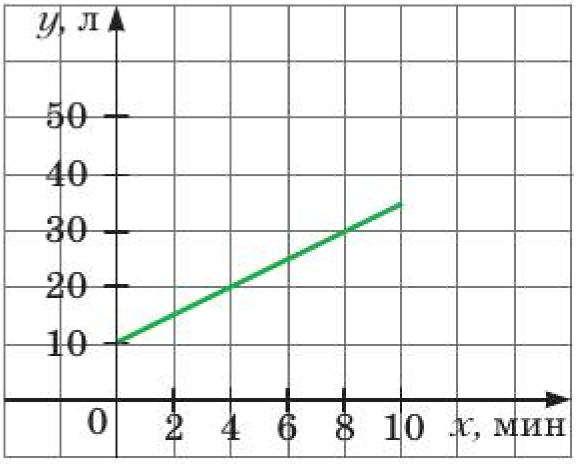


Рис. **26.9**

5) Сколько литров воды каждую минуту наливается в один бак и сколько выливается из другого?

6) Задайте формулой зависимость количества воды в каждом баке от времени.

26.39. Какая из прямых на рисунке 26.10 является графиком функции:

1) $y = x$; 2) $y = 4x$; 3) $y = \frac{1}{4}x$; 4) $y = -\frac{1}{4}x$?

26.40. Какая из прямых на рисунке 26.11 является графиком функции:

1) $y = -x$; 2) $y = 3x$; 3) $y = -\frac{1}{2}x$; 4) $y = -2x$?

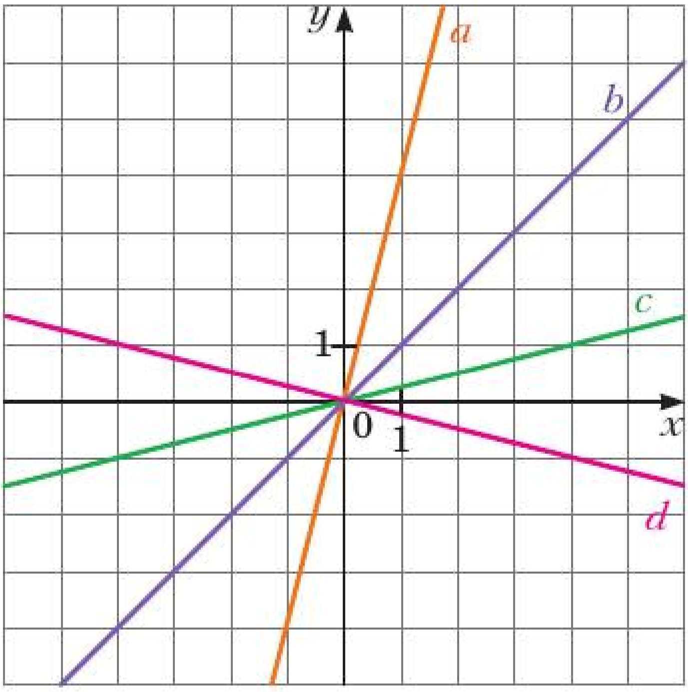


Рис. **26.10**

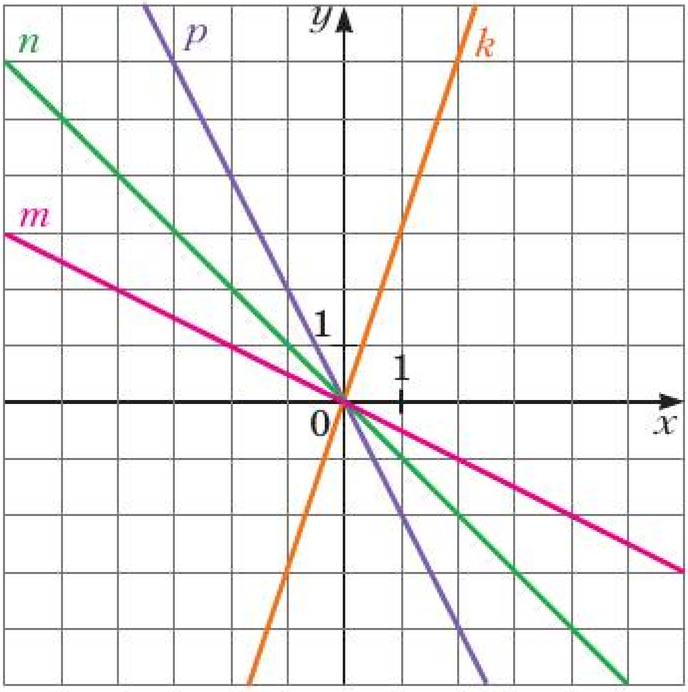


Рис. **26.11**

26.41. Докажите, что не существует такого значения a, при котором прямая $y = ax - 5$ проходит через начало координат.

26.42. Задайте формулами какие-нибудь две линейные функции, графики которых проходят через точку:

1) $A\ (0;\ 4)$; 2) $B\ (1;\ 3)$.

◆ ◆ ◆

26.43. Графики функций $y = 0{,}5x - 3$, $y = -4x + 6$ и $y = kx$ пересекаются в одной точке. Найдите значение k. Постройте в одной системе координат графики этих функций.

26.44. При каком значении b графики функций $y = 1{,}5x - 3$, $y = 2{,}5x + 1$ и $y = 5x + b$ пересекаются в одной точке?

26.45. Точка C принадлежит отрезку AB, длина которого равна 8. Длина отрезка AC равна x, длина отрезка BC — y. Постройте график зависимости y от x, $0 < x < 8$. Отметьте на этом графике точку, соответствующую случаю, когда C — середина отрезка AB.

26.46. Периметр прямоугольника $ABCD$ равен 12, $AB = x$, $AD = y$, $0 < x < 6$. Постройте график зависимости y от x. Отметьте на этом графике точку, соответствующую случаю, когда прямоугольник $ABCD$ является квадратом.

26.47. Постройте график функции:

1) $y = \begin{cases} x - 4, & \text{если } x \geqslant 0, \\ -2x - 4, & \text{если } x < 0; \end{cases}$

2) $y = \begin{cases} 3x - 2, & \text{если } x \leqslant 1, \\ 1, & \text{если } x > 1; \end{cases}$

3) $y = \begin{cases} 2, & \text{если } x \neq 2, \\ 3, & \text{если } x = 2; \end{cases}$

4) $y = \begin{cases} 2x, & \text{если } x < -1, \\ 1, & \text{если } x = -1, \\ x + 3, & \text{если } x > -1. \end{cases}$

26.48. Постройте график функции:

1) $y = \begin{cases} -3x, & \text{если } x \leqslant -1, \\ 3, & \text{если } -1 < x < 1, \\ 2x + 1, & \text{если } x \geqslant 1; \end{cases}$

2) $y = \begin{cases} 5 - x, & \text{если } x \leqslant 3, \\ x + 1, & \text{если } x > 3. \end{cases}$

26.49. Постройте график функции:

1) $y = |x|$; 2) $y = |x| + x$; 3) $y = 4x - |x| + 2$.

26.50. Постройте график функции:

1) $y = -|x|$; 2) $y = x - |x|$; 3) $y = 3x + 2|x|$.

26.51. Задайте формулой линейную функцию, графиком которой является прямая на рисунке 26.12: 1) a; 2) b.

26.52. Задайте формулой линейную функцию, графиком которой является прямая на рисунке 26.13: 1) m; 2) n.

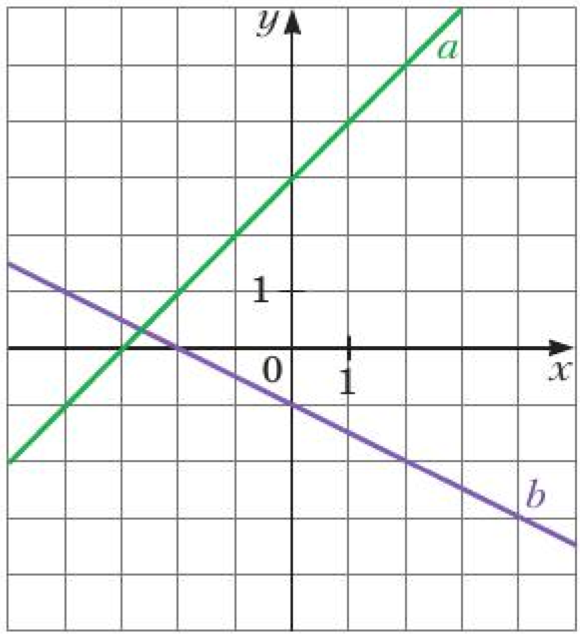


Рис. 26.12

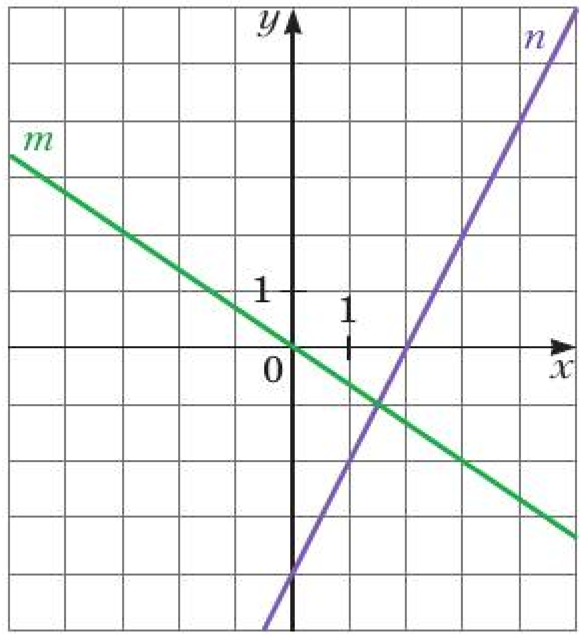


Рис. 26.13

26.53. На рисунке 26.14 изображён график функции $f(x) = ax + b$. Найдите значение выражения $a + b$.

26.54. На рисунке 26.15 изображены графики линейных функций. Могут ли это быть графики функций $y = kx + b$ и $y = bx + k$?

26.55. На рисунке 26.16 изображён график функции $y = kx + b$. На той же координатной плоскости изобразите график функции $y = bx + k$.

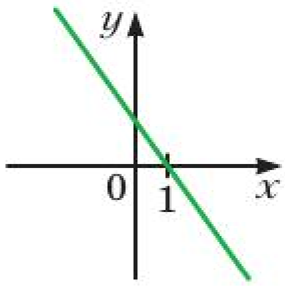


Рис. 26.14

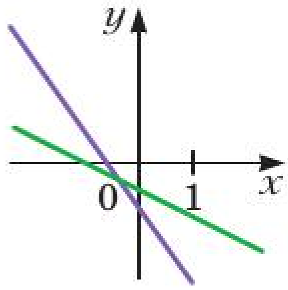


Рис. 26.15

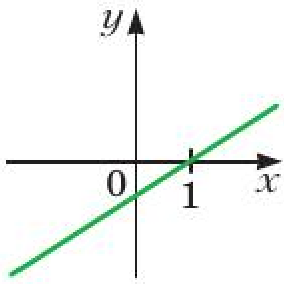


Рис. 26.16

26.56. Графики функций $y = -(2k + 3)x - 1 - 2k$ и $y = kx + k + 2$, где $k > 0$, пересекают ось ординат в точках A и B соответственно. Точку пересечения этих графиков обозначили буквой M. Можно ли, стерев оси координат и графики, восстановить систему координат по точкам A, B и M?

26.57. Графики функций $y = ax + b$ и $y = bx + a$, где $a > 0$ и $b > 0$, пересекают ось ординат в точках A и B соответственно. Точку пересечения этих графиков обозначили буквой M. Можно ли, стерев оси координат и графики, восстановить систему координат по точкам A, B и M?

Упражнения для повторения

26.58. Найдите значение выражения:

1) $(2 + 3a)(5 - a) - (2 - 3a)(5 + a)$ при $a = -1{,}5$;

2) $(3a + b)^2 - (3a - b)^2$ при $a = -3\frac{1}{3}$, $b = 0{,}3$.

26.59. Решите уравнение:

1) $(5x + 1)(2x - 3) = (10x - 9)(x + 2)$;

2) $(7x - 1)(x + 5) = (3 + 7x)(x + 3)$.

26.60. Докажите, что сумма кубов трёх последовательных натуральных чисел делится нацело на 3.

26.61. В двух кадках было поровну воды. Объём воды в первой кадке сначала увеличили на 10 %, а потом уменьшили на 10 %. Объём воды во второй кадке, наоборот, сначала уменьшили на 10 %, а потом увеличили на 10 %. В какой кадке воды стало больше?

26.62. Известно, что $x^2 + y^2 = a$, $xy = b$. Чему равно значение выражения $x^4 + x^2y^2 + y^4$?

26.63. Докажите, что при любом значении x значение выражения $|x| - x$ больше соответствующего значения выражения $2x - x^2 - 2$.

Равные множества

Множества A и B называют равными, если они состоят из одних и тех же элементов, т. е. каждый элемент множества A принадлежит множеству B и наоборот — каждый элемент множества B принадлежит множеству A.

Функция

Функцией называют правило, с помощью которого по каждому значению независимой переменной из множества X можно найти единственное значение зависимой переменной из множества Y.

Область определения функции

Все значения аргумента образуют множество, которое называют областью определения функции.

Область значений функции

Все значения зависимой переменной образуют множество, которое называют областью значений функции.

График функции

Графиком функции f называют геометрическую фигуру, состоящую из всех тех и только тех точек координатной плоскости, абсциссы которых равны значениям аргумента, а ординаты — соответствующим значениям функции f.

Линейная функция

Функцию, которую можно задать формулой вида $y = kx + b$, где k и b — некоторые числа, x — независимая переменная, называют линейной.

График линейной функции

Графиком линейной функции является прямая.

Прямая пропорциональность

Линейную функцию, которую задают формулой $y = kx$, где $k \neq 0$, называют прямой пропорциональностью.

глава

4 Системы линейных уравнений с двумя переменными

- В этой главе вы познакомитесь с уравнениями с двумя переменными и их системами. Изучите некоторые методы их решения.
- Вы узнаете, что уравнение с двумя переменными может служить математической моделью реальной ситуации. Овладеете новым эффективным методом решения текстовых задач.

§ 27 Уравнения с двумя переменными

Рассмотрим несколько примеров реальных ситуаций.

Пример 1. Расстояние между Москвой и Санкт-Петербургом равно 634 км. Из Москвы в Санкт-Петербург со скоростью x км/ч выехал автомобиль. Через 1 ч навстречу ему из Санкт-Петербурга со скоростью y км/ч выехал второй автомобиль. Они встретились через 3 ч после выезда второго автомобиля.

Построим математическую модель этой ситуации.

Путь, пройденный вторым автомобилем до встречи, равен $3y$ км. Поскольку первый автомобиль находился в пути на 1 ч дольше второго, т. е. 4 ч, то он до встречи проехал $4x$ км.

Вместе автомобили проехали 634 км. Отсюда

$4x + 3y = 634.$

Это равенство с двумя переменными является математической моделью вышеописанной реальной ситуации. ■

Рассмотрим ещё несколько примеров ситуаций, математическими моделями которых служат равенства с двумя переменными.

Пример 2. Площадь квадрата со стороной 10 см равна сумме площадей двух других квадратов.

Площадь квадрата со стороной 10 см равна 100 см^2. Если длины сторон двух других квадратов обозначить x см и y см, то получим равенство

$$x^2 + y^2 = 100. ■$$

Пример 3. Дан прямоугольный треугольник.

Если градусные меры его острых углов обозначить x° и y°, то можно записать

$$x + y = 90. ■$$

Пример 4. Дан прямоугольник, площадь которого равна 12 см^2. Обозначим длины его сторон x см и y см. Тогда

$$xy = 12. ■$$

Пример 5. Купили 5 ручек и 7 тетрадей. За всю покупку заплатили 290 р.

Если одна ручка стоит x р., а одна тетрадь — y р., то

$$5x + 7y = 290. ■$$

Как видим, каждое из полученных в примерах 1–5 равенств

$$4x + 3y = 634,$$
$$x^2 + y^2 = 100,$$
$$x + y = 90,$$
$$xy = 12,$$
$$5x + 7y = 290$$

содержит по две переменные x и y. Такие равенства называют **уравнениями с двумя переменными**.

Если, например, в уравнение $xy = 12$ вместо x и y подставить числа 2 и 6, то получим верное равенство $2 \cdot 6 = 12$. В этом случае говорят, что пара значений переменных $x = 2$, $y = 6$ **удовлетворяет** данному уравнению или что эта пара является **решением** данного уравнения.

Определение

Пару значений переменных, обращающую уравнение в верное равенство, называют решением уравнения с двумя переменными.

Так, для уравнения $x^2 + y^2 = 100$ каждая из пар чисел

$$x = 8,\ y = 6;$$
$$x = -6,\ y = 8;$$
$$x = 10,\ y = 0$$

является его решением, а, например, пара $x = 5$, $y = 9$ его решением не является.

Обратим внимание на то, что данное определение похоже на определение корня уравнения с одной переменной. В связи с этим распространена ошибка: называть каждое число пары или саму пару, являющуюся решением, корнем уравнения с двумя переменными.

Тот факт, что пара $x = a$, $y = b$ является решением уравнения, принято записывать так: пара $(a; b)$ является решением уравнения. Иногда запись $(a; b)$ называют **упорядоченной парой чисел**, тем самым подчёркивая, что порядок следования букв a и b имеет значение. В скобках на первом месте пишут значение переменной x, а на втором — значение переменной y.

Если переменные в уравнении обозначены буквами, отличными от x и y, то, записывая решение в виде пары, надо договориться, значение какой переменной ставится на первое место в паре, а какой — на второе. Как правило, принимается во внимание порядок букв латинского алфавита. Используя такое обозначение, можно, например, записать, что каждая из пар чисел (5; 85), (40; 50), (50; 40) является решением уравнения $x + y = 90$.

Три указанные пары не исчерпывают все решения этого уравнения. Если вместо переменной y подставлять в уравнение $x + y = 90$ любые её значения, то будем получать линейные уравнения с одной переменной, корнями которых будут соответствующие значения переменной x. Понятно, что так можно получить бесконечно много пар чисел, являющихся решениями уравнения $x + y = 90$.

Уравнение с двумя переменными не обязательно имеет бесконечно много решений. Например, уравнение $|x| + |y| = 0$ имеет только одно решение — пару чисел (0; 0). Действительно, поскольку $|x| \geqslant 0$ и $|y| \geqslant 0$, то при $x \neq 0$ или $y \neq 0$ левая часть уравнения принимает только положительные значения. Уравнение $x^2 + y^2 = -2$ решений не имеет (докажите это самостоятельно).

Заметим, что мы решили каждое из уравнений $|x| + |y| = 0$ и $x^2 + y^2 = -2$, а уравнение $x + y = 90$ нами не решено.

Определение

Решить уравнение с двумя переменными — это значит найти все его решения или показать, что оно не имеет решений.

Также можно сказать: **решить уравнение с двумя переменными — это значит найти множество его решений.**

Свойства уравнений с двумя переменными запомнить легко: они аналогичны свойствам уравнений с одной переменной, которые вы изучали в курсе математики 6 класса.

- **Если к обеим частям данного уравнения прибавить (или из обеих частей вычесть) одно и то же число, то получим уравнение, имеющее то же множество решений, что и данное.**

• Если какое-либо слагаемое перенести из одной части уравнения в другую, изменив при этом его знак на противоположный, то получим уравнение, имеющее то же множество решений, что и данное.

• Если обе части уравнения умножить (разделить) на одно и то же отличное от нуля число, то получим уравнение, имеющее то же множество решений, что и данное.

Рассмотрим уравнение $x^2 + y^2 + 2 = 2x - 2y$. Преобразуем его, используя свойства уравнений. Имеем:

$$x^2 - 2x + y^2 + 2y + 2 = 0;$$
$$x^2 - 2x + 1 + y^2 + 2y + 1 = 0;$$
$$(x - 1)^2 + (y + 1)^2 = 0.$$

Поскольку $(x - 1)^2 \geqslant 0$ и $(y + 1)^2 \geqslant 0$, то левая часть уравнения обращается в нуль только при *одновременном* выполнении условий: $x - 1 = 0$ и $y + 1 = 0$. Отсюда следует, что пара чисел $(1; -1)$ — единственное решение данного уравнения.

Изучая какой-то объект, мы стремимся не только описать его свойства, но и составить о нём наглядное представление. График функции — характерный тому пример. Поскольку решением уравнения с двумя переменными является пара чисел, например $(a; b)$, то совершенно естественно изобразить это решение в виде точки $M (a; b)$ на координатной плоскости. Если изобразить все решения уравнения, то получим **график уравнения**.

Определение

Графиком уравнения с двумя переменными называют геометрическую фигуру, состоящую из всех тех и только тех точек координатной плоскости, координаты которых (пары чисел) являются решениями данного уравнения.

Например, рассмотренное выше уравнение $x^2 + y^2 + 2 = 2x - 2y$ имеет единственное решение $(1; -1)$. Поэтому его графиком является единственная точка $M (1; -1)$ (рис. 27.1).

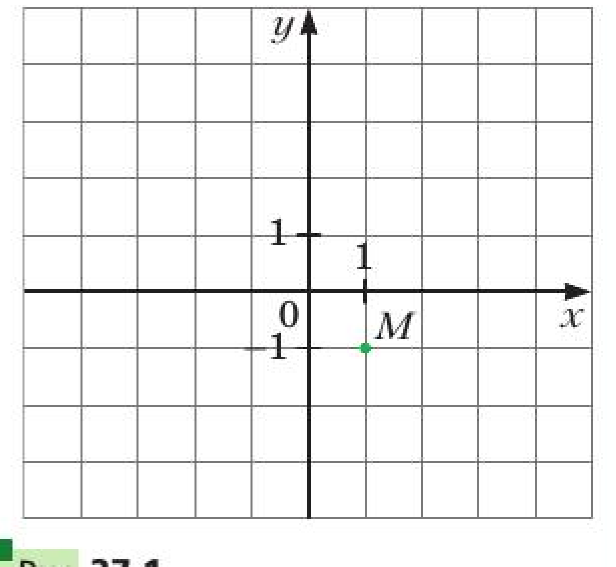


Рис. 27.1

На рисунке 27.2 изображён график функции $y = 2x - 1$. Поскольку формула, задающая линейную функцию, является уравнением с двумя переменными, то также можно сказать, что на рисунке 27.2 изображён график уравнения $y = 2x - 1$.

Подчеркнём, что *если какая-то фигура является графиком уравнения, то выполняются два условия*:

1) *все решения уравнения являются координатами точек, принадлежащих графику*;

2) *координаты любой точки, принадлежащей графику, — это пара чисел, которая является решением данного уравнения*.

Графики уравнений очень разнообразны. Со многими из них вы познакомитесь в курсе алгебры. Например, в курсе алгебры 8 класса вы узнаете, что графиком рассмотренного в начале параграфа уравнения $xy = 12$ является фигура, изображённая на рисунке 27.3. Её называют

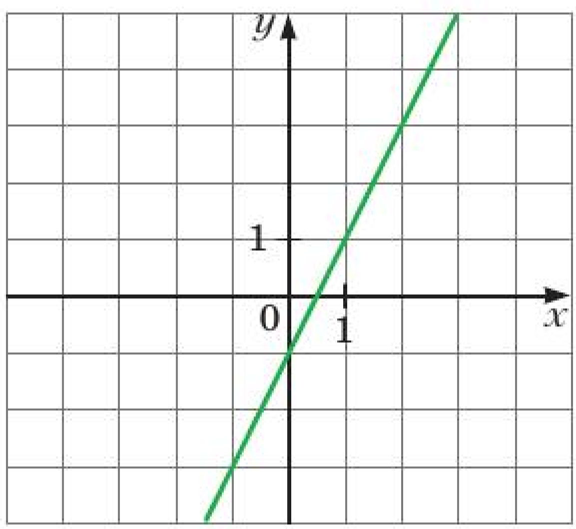


Рис. **27.2**

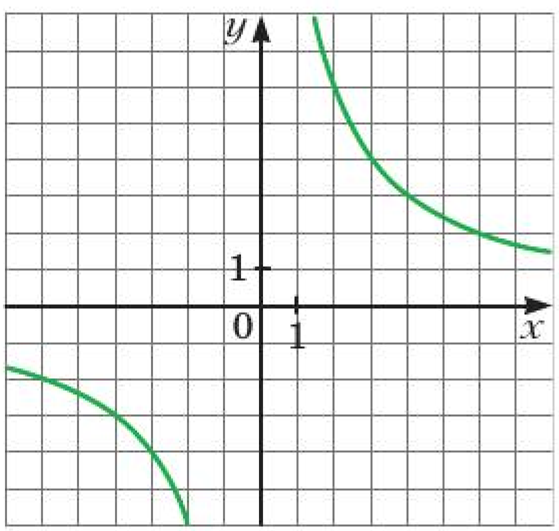


Рис. **27.3**

гиперболой. А в курсе геометрии 9 класса вы сможете доказать, что графиком уравнения $x^2 + y^2 = 4$ является окружность (рис. 27.4).

Пример 6. Постройте график уравнения $xy + 3y = 0$.

Решение. Запишем данное уравнение в виде $y(x + 3) = 0$. Отсюда $y = 0$ или $x + 3 = 0$.

Следовательно, решениями данного уравнения являются все пары чисел вида $(x; 0)$, где x — произвольное число, и все пары чисел вида $(-3; y)$, где y — произвольное число.

Множество точек, координаты которых имеют вид $(x; 0)$, где x — произвольное число, образуют ось абсцисс.

Множество точек, координаты которых имеют вид $(-3; y)$, где y — произвольное число, образуют прямую, проходящую через точку $(-3; 0)$ параллельно оси ординат.

Следовательно, графиком данного уравнения является пара прямых, изображённых на рисунке 27.5. ■

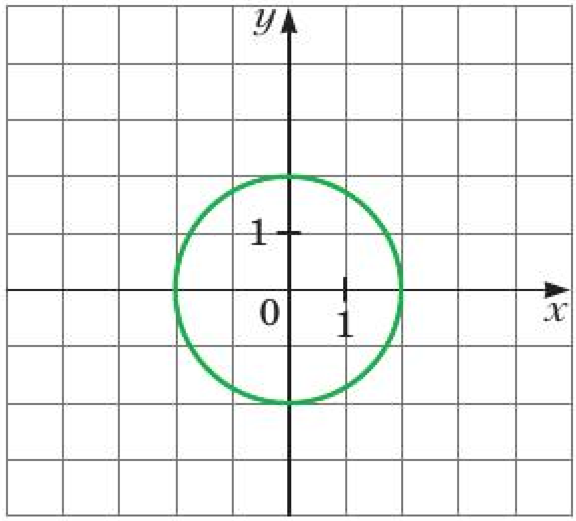


Рис. 27.4

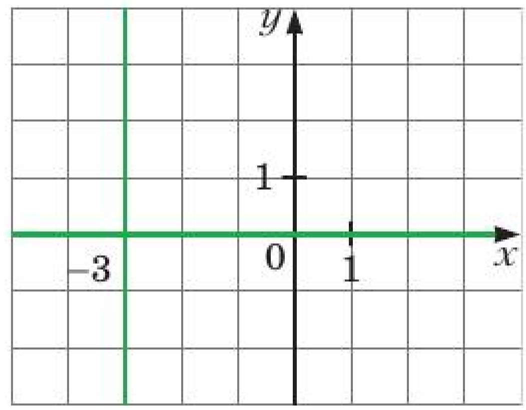


Рис. 27.5

Пример 7. Какая фигура является графиком уравнения:

1) $|x| + |y - 2| = 0$;

2) $x^2 + y = y + x^2$?

Решение. 1) Так как $|x| \geqslant 0$ и $|y - 2| \geqslant 0$, то левая часть уравнения будет равна нулю только при одновременном выполнении условий: $x = 0$ и $y - 2 = 0$. Отсюда пара чисел $(0; 2)$ — единственное решение данного уравнения. Следовательно, искомым графиком является точка с координатами $(0; 2)$.

2) Понятно, что любая пара $(x; y)$ является решением данного уравнения. Следовательно, его графиком является вся координатная плоскость. ■

1. Что называют решением уравнения с двумя переменными?

2. Что означает решить уравнение с двумя переменными?

3. Сформулируйте свойства уравнений с двумя переменными.

4. Что называют графиком уравнения с двумя переменными?

5. Может ли график уравнения с двумя переменными состоять только из одной точки?

6. Какая фигура является графиком уравнения $y = kx + b$?

Упражнения

27.1. Какие из данных уравнений являются уравнениями с двумя переменными:

1) $2x + y = 8$;	4) $a^2 - 3b = 8c$;	7) $x^3 - 8x = 100$;
2) $x + y + z = 0$;	5) $xy + 1 = 2$;	8) $x^3 - 8y = 100$;
3) $a^2 - 3b = 8$;	6) $5m - 3n = 6$;	9) $x^3 - 8xy = 100$?

27.2. Является ли пара чисел (–2; 3) решением уравнения:

1) $4x + 3y = 1$; 2) $x^2 + 5 = y^2$; 3) $xy = 6$?

27.3. Какие из пар чисел (0; 1); (5; –4); (0; 1,2); (–1; 1); (1; –1) являются решениями уравнения:

1) $x^2 + 5y - 6 = 0$; 2) $xy + x = 0$?

27.4. Принадлежит ли графику уравнения $2x^2 - y + 1 = 0$ точка:

1) A (–3; –17); 2) B (2; 9); 3) C (–2; 9); 4) D (–1; 4)?

27.5. Докажите, что график уравнения $xy - 12 = 0$ не проходит через точку:

1) A (3; –4); 2) B (–2; 6); 3) C (7; 2).

27.6. Проходит ли через начало координат график уравнения:

1) $12x + 17y = 0$; 2) $x^2 - xy + 2 = 0$; 3) $x^3 - 4y = y^2 + 3x$?

27.7. Укажите какие-нибудь три решения уравнения:

1) $x - y = 10$; 2) $x = 4y$; 3) $2x^2 + y = 20$.

27.8. Укажите какие-нибудь три решения уравнения:

1) $x + y = 1$; 2) $5x - y = 2$.

◆ ◆

27.9. График уравнения $4x + 3y = 30$ проходит через точку A (6; b). Чему равно значение b?

27.10. График уравнения $7x - 5y = 47$ проходит через точку B (a; –1). Чему равно значение a?

27.11. При каком значении a пара чисел (–4; 3) является решением уравнения:

1) $3x + 5y = a$; 2) $ax + 5y = 19$?

27.12. При каком значении a график уравнения $11x - 13y = a + 6$ проходит через начало координат?

27.13. Не выполняя построения, найдите координаты точек пересечения с осями координат графика уравнения:

1) $x + y = 2$; 3) $x^2 + y^2 = 9$;
2) $x^3 - y = 1$; 4) $|x| - y = 5$.

27.14. Не выполняя построения, найдите координаты точек пересечения с осями координат графика уравнения:

1) $2x - 3y = 6$; 2) $x^2 + y = 4$; 3) $|x| + |y| = 7$.

27.15. Составьте какое-нибудь уравнение с двумя переменными, решением которого является пара чисел:

1) $x = 1$, $y = 2$; 2) $x = -3$, $y = 5$; 3) $x = 10$, $y = 0$.

27.16. Составьте какое-нибудь уравнение с двумя переменными, график которого проходит через точку:

1) A (–2; 2); 2) B (4; –1); 3) C (0; 0).

27.17. Придумайте три уравнения, графики которых проходят через точку M (6; –3).

27.18. Придумайте три уравнения, графики которых проходят через точку K (0; 4).

27.19. Принадлежат ли графику уравнения $x^4 - y = -2$ точки, имеющие отрицательную ординату?

27.20. Проходит ли график уравнения $x + y^2 = -4$ через точки, имеющие положительную абсциссу?

27.21. Имеет ли решения уравнение:

1) $y^2 = x^2$; 4) $x^2 + y^2 = 25$; 7) $|x| + |y| = 1$;
2) $y^2 = -x^2$; 5) $x^2 + y^2 = -25$; 8) $|x| + |y| = 0$;
3) $xy = 0$; 6) $x^2 - y^2 = -9$; 9) $|x| + |y| = -1$?

В случае утвердительного ответа укажите примеры решений.

27.22. Решите уравнение:

1) $x^2 + y^2 = 0$; 2) $(x + 2)^2 + (y - 3)^2 = 0$; 3) $x^4 + y^6 = -4$.

27.23. Сколько решений имеет уравнение:

1) $x^2 + (y - 2)^2 = 0$; 5) $xy = 2$;
2) $(x + 3)^2 + (y - 1)^2 = 0$; 6) $|x + 1| + |y| = 0$;
3) $9x^2 + 16y^2 = 0$; 7) $x^2 + |y| = -100$;
4) $(x^2 + y^2)y = 0$; 8) $x + y = 2$?

27.24. Приведите пример уравнения с переменными x и y:

1) имеющего одно решение;
2) не имеющего решений;
3) имеющего бесконечно много решений;
4) решением которого является любая пара чисел.

27.25. Что представляет собой график уравнения:

1) $(x - 1)^2 + (y + 5)^2 = 0$; 3) $4x + y = y + 4x$;
2) $|x + 9| + |y - 8| = 0$; 4) $(x - 1)(y + 5) = 0$?

27.26. Постройте график уравнения:

1) $(x + 2)^2 + y^2 = 0$; 3) $xy = 0$; 5) $xy - 2y = 0$.
2) $|x| + (y - 3)^2 = 0$; 4) $(x + 1)(y - 1) = 0$;

27.27. Постройте график уравнения:

1) $|x - 4| + |y - 4| = 0$; 2) $(x - 4)(y - 4) = 0$; 3) $xy + x = 0$.

27.28. Найдите решение уравнения $5x + 3y = 24$, являющееся парой равных чисел.

27.29. Найдите решение уравнения $-12x + 13y = -100$, являющееся парой противоположных чисел.

27.30. Найдите все пары $(x; y)$ натуральных чисел, являющиеся решениями уравнения:

1) $2x + 3y = 5$; 2) $x + 5y = 16$.

27.31. Найдите все пары $(x; y)$ целых чисел, являющиеся решениями уравнения $|x| + |y| = 2$.

27.32. Найдите все пары $(x; y)$ целых чисел, являющиеся решениями уравнения $x^2 + y^2 = 5$.

27.33. Кате надо заплатить за брошюру 29 р. У неё есть только монеты по 2 р. и по 5 р. Сколькими способами она может рассчитаться за покупку, не получая сдачи?

27.34. Ученикам 7 класса на математическом конкурсе предложили решить задачи по алгебре и по геометрии. За каждую правильно решённую задачу по алгебре начислялось 2 балла, а за задачу по геометрии — 3 балла. Максимальное количество набранных баллов могло составить 24. Сколько было предложено задач отдельно по алгебре и по геометрии, если по каждому из этих предметов была хотя бы одна задача? Найдите все возможные ответы.

27.35. Решите уравнение:

1) $x^2 + y^2 + 4 = 4y$;
2) $x^2 + y^2 + 2x - 6y + 10 = 0$;
3) $x^2 + y^2 + x + y + 0,5 = 0$;
4) $9x^2 + y^2 + 2 = 6x$.

27.36. Решите уравнение:

1) $x^2 + 10y + 30 = 10x - y^2 - 20$; 2) $4x^2 + y^2 + 4x = 2y - 3$.

27.37. Графиком уравнения $(x^2 + y^2 + y)^2 = x^2 + y^2$ является кривая, которую называют *кардиоидой* (рис. 27.6). Найдите координаты её точек пересечения с осями координат.

27.38. Графиком уравнения $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$ является кривая, которую называют *эллипсом* (рис. 27.7). Найдите координаты её точек пересечения с осями координат.

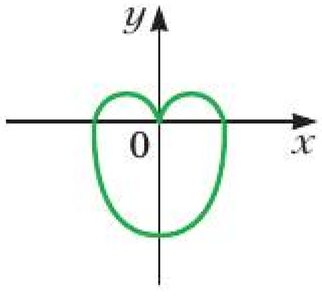


Рис. **27.6**

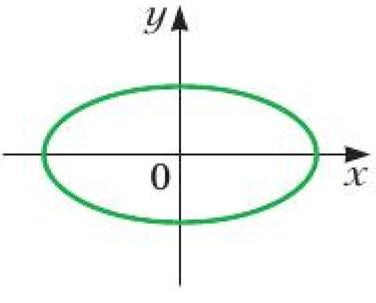


Рис. **27.7**

Упражнения для повторения

27.39. В ёмкость, содержащую 150 мл 8%-го раствора кислоты, добавили 90 мл воды. Чему равна концентрация кислоты в полученном растворе?

27.40. В мешке 7 красных, 10 зелёных и 12 жёлтых яблок. Какое наименьшее количество яблок надо вынуть, не заглядывая в мешок, чтобы с вероятностью, равной 1, среди вынутых яблок хотя бы одно было зелёным?

27.41. Найдите корень уравнения:

1) $\frac{4x+1}{5} - \frac{2x-3}{3} = x - 4$; 2) $\frac{3x-5}{4} - \frac{5x-2}{3} = x + 9$.

27.42. Из города A в город B одновременно выехали легковой и грузовой автомобили. Легковой автомобиль прибыл в город B через 3,5 ч после выезда, а грузовому осталось ещё проехать 77 км. Найдите расстояние между городами, если скорость грузового автомобиля в 1,4 раза меньше скорости легкового.

27.43. Можно ли утверждать, что при любом натуральном чётном значении n значение выражения $(5n + 10)^2 - (2n + 4)^2$ делится нацело на 84?

27.44. Известно, что при некоторых значениях m, n и k значение выражения $3m^2n$ равно 2, а значение выражения n^2k^4 равно 3. Найдите при тех же самых значениях m, n и k значение выражения:

1) $(3m^2n^2k^2)^2$; 2) $(-2m^2nk^2)^3 \cdot (0{,}5n^2k)^2$.

§ 28 Линейное уравнение с двумя переменными и его график

Определение

Линейным уравнением с двумя переменными называют уравнение вида $ax + by = c$, где x и y — переменные, a, b, c — некоторые числа.

Уравнения $4x + 3y = 634$, $x + y = 90$, знакомые вам по предыдущему параграфу, являются линейными. Вот ещё примеры линейных уравнений: $x + y = 3$; $0x + 5y = -1$; $-3x + 0y = 5$; $0x + 0y = 0$; $0x + 0y = 2$.

Выясним, какая фигура является графиком линейного уравнения. Для этого рассмотрим три случая.

Случай 1. Пусть задано линейное уравнение $ax + by = c$, в котором $b \neq 0$. Это уравнение можно преобразовать так:

$$by = -ax + c.$$

Поскольку $b \neq 0$, то, разделив обе части последнего уравнения на b, получим: $y = -\frac{a}{b}x + \frac{c}{b}$.

Введём обозначения: $-\frac{a}{b} = k$, $\frac{c}{b} = p$. Теперь можно записать

$$y = kx + p.$$

Мы получили формулу, задающую линейную функцию. Графиком линейной функции является невертикальная прямая. Значит, *графиком уравнения $ax + by = c$, где $b \neq 0$, является невертикальная прямая*.

Пример 1. Постройте график уравнения $x - 3y = -2$.

Решение. Графиком этого уравнения является прямая. Поэтому для построения достаточно определить координаты двух любых её точек. Имеем: если $x = 1$, то $y = 1$; если $x = -2$, то $y = 0$. Теперь через точки $M (1; 1)$ и $N (-2; 0)$ проведём прямую (рис. 28.1). Эта прямая и является искомым графиком. ■

Случай 2. Пусть задано линейное уравнение $ax + by = c$, в котором $a \neq 0$, $b = 0$. Получаем $ax + 0y = c$. Построение графика уравнения такого вида рассмотрим на примере.

Пример 2. Постройте график уравнения $3x + 0y = 6$.

Решение. Легко найти несколько решений этого уравнения. Вот, например, четыре его решения: $(2; -1)$; $(2; 0)$; $\left(2; \frac{1}{3}\right)$; $(2; -100)$. Ясно, что любая пара вида $(2; t)$, где t — произвольное число, является решением. Следовательно, искомый график содержит все точки, у которых абсцисса равна 2, а ордината — любое число. Все эти точки принадлежат прямой, перпендикулярной оси абсцисс и проходящей через точку $(2; 0)$ (рис. 28.2). При этом координаты любой точки этой прямой — пара чисел, являющаяся решением данного уравнения. А значит, указанная прямая и является искомым графиком. ■

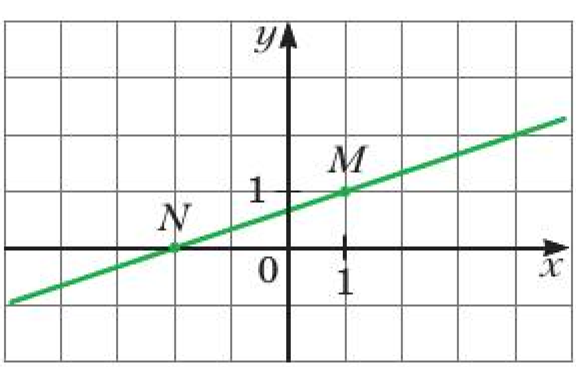


Рис. 28.1

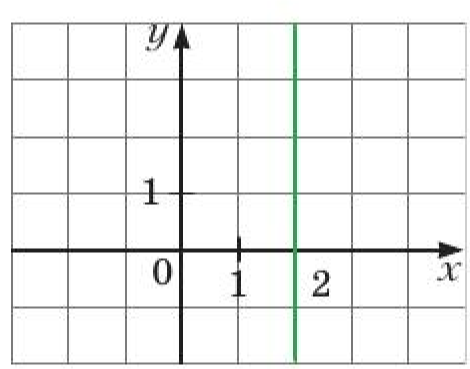


Рис. 28.2

Рассуждая аналогично, можно показать, что графиком уравнения $ax + 0y = c$, где $a \neq 0$, является вертикальная прямая.

Теперь можно сделать такой вывод: ***в каждом из двух случаев: 1) $b \neq 0$; 2) $b = 0$ и $a \neq 0$ — графиком уравнения $ax + by = c$ является прямая.***

Часто, например, вместо предложения «дано уравнение $y = 2x$» говорят «дана прямая $y = 2x$».

Случай 3. Пусть задано линейное уравнение $ax + by = c$, в котором $a = b = 0$. Имеем: $0x + 0y = c$.

Если $c \neq 0$, то это уравнение не имеет решений, а следовательно, на координатной плоскости не существует точек, которые могли бы служить графиком уравнения.

Если $c = 0$, то уравнение принимает вид:

$$0x + 0y = 0.$$

Любая пара чисел является его решением. Значит, в этом случае график уравнения — вся координатная плоскость.

Следующая таблица подытоживает материал, рассмотренный в этом параграфе.

Уравнение	Значения a, b, c	График уравнения
$ax + by = c$	$b \neq 0$, a и c — любые	Невертикальная прямая
$ax + by = c$	$b = 0$, $a \neq 0$, c — любое	Вертикальная прямая
$ax + by = c$	$a = b = c = 0$	Вся координатная плоскость
$ax + by = c$	$a = b = 0$, $c \neq 0$	—

Пример 3. Выразите из уравнения $3x - 2y = 6$ переменную x через переменную y и найдите каких-нибудь два решения этого уравнения.

Решение. Имеем: $3x = 2y + 6$;

$$x = \frac{2y + 6}{3};$$

$$x = \frac{2}{3}y + 2.$$

Придавая переменной y произвольные значения и вычисляя по полученной формуле $x = \frac{2}{3}y + 2$ соответствующие значения переменной x, можем найти бесконечно много решений данного уравнения $3x - 2y = 6$.

Например,

если $y = 6$, то $x = \frac{2}{3} \cdot 6 + 2 = 6$,

если $y = -2$, то $x = \frac{2}{3} \cdot (-2) + 2 = \frac{2}{3}$.

Пары чисел (6; 6) и $\left(\frac{2}{3}; -2\right)$ являются решениями данного уравнения. ■

Пример 4. Составьте линейное уравнение с двумя переменными, графиком которого является прямая, проходящая через начало координат и точку A (3; –12). Постройте график этого уравнения.

Решение. Так как график искомого уравнения проходит через точки O (0; 0) и A (3; –12), имеющие разные абсциссы, то он является невертикальной прямой. Тогда уравнение этой прямой можно записать в виде $y = kx + b$, где k и b — некоторые числа.

Из того, что график проходит через начало координат, следует, что $b = 0$. Так как график проходит через точку A (3; –12), то $-12 = 3k$, откуда $k = -4$.

Значит, искомое уравнение имеет вид $y = -4x$ или $4x + y = 0$. График этого уравнения изображён на рисунке 28.3.

Ответ: $4x + y = 0$. ■

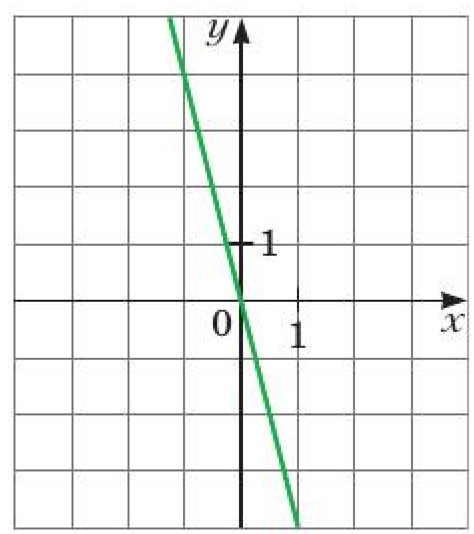


Рис. 28.3

1. Какое уравнение называют линейным уравнением с двумя переменными?
2. Что является графиком уравнения $ax + by = c$, если $b \neq 0$ или если $b = 0$ и $a \neq 0$?
3. Что является графиком уравнения $ax + by = c$ при $a = b = c = 0$?
4. При каких значениях a, b и c уравнение $ax + by = c$ не имеет решений?

Упражнения

28.1. Является ли линейным уравнение с двумя переменными:

1) $7x + 11y = 36$;
2) $x^2 + 4y = 6$;
3) $12x - 17y = 0$;
4) $-3x + xy = 10$?

28.2. Какие из пар чисел (7; 1), (0; –2), (8; 2), (–7; –5), (10; 3) являются решениями уравнения $3x - 7y = 14$?

28.3. Решением каких уравнений является пара чисел (3; –2):
1) $4x + 5y = 2$; 2) $3x - 2y = 5$; 3) $0{,}2x - 0{,}5y = 1{,}6$?

28.4. Известно, что пара чисел $(-5; y)$ является решением уравнения $2x + 9y = 17$. Найдите значение y.

28.5. Известно, что пара чисел $(x; 6)$ является решением уравнения $8x - 3y = 22$. Найдите значение x.

28.6. Графику какого из уравнений принадлежит точка M (1; 4):
1) $4y - 2x = -4$; 2) $6x + 11y = 50$?

28.7. Проходит ли график уравнения $3x + y = -1$ через точку:
1) M (–3; 10); 2) N (4; –13); 3) K (0; –1)?

28.8. Выразите из данного уравнения переменную x через переменную y и найдите какие-нибудь три решения этого уравнения:
1) $x + y = 12$; 3) $2x + 8y = 16$;
2) $x - 7y = 5$; 4) $-6x + 5y = 18$.

28.9. Выразите из данного уравнения переменную y через переменную x и найдите какие-нибудь два решения этого уравнения:
1) $4x - y = 7$; 2) $-2x + y = 11$; 3) $5x - 3y = 15$.

28.10. Найдите какие-нибудь три решения уравнения:
1) $x - y = 10$; 2) $2y - 5x = 11$.

28.11. Найдите какие-нибудь три решения уравнения:
1) $6x + y = 7$; 2) $2x - 3y = -4$.

28.12. Постройте график уравнения:
1) $x - y = 4$; 3) $x - 5y = 5$;
2) $4x + y = 3$; 4) $3x + 2y = 6$.

28.13. Постройте график уравнения:
1) $x + y = -3$; 2) $6x + y = 0$; 3) $2x - 3y = 9$.

28.14. Какие пары чисел являются решениями уравнения:
1) $0x + 4y = 20$; 2) $-3x + 0y = 27$?

28.15. Постройте график уравнения:
1) $4y = -8$; 2) $1{,}2x = 3{,}6$.

28.16. Постройте график уравнения:
1) $-0{,}2x = 1$; 2) $0{,}5y = 2$.

28.17. В какой точке прямая $7y - 3x = 21$ пересекает: 1) ось x; 2) ось y?

28.18. Найдите координаты точек пересечения прямой $0{,}3x + 0{,}2y = 6$ с осями координат.

28.19. Составьте какое-нибудь линейное уравнение с двумя переменными, решением которого является пара чисел (–2; 1).

28.20. Составьте какое-нибудь линейное уравнение с двумя переменными, решением которого является пара чисел (3; 5).

28.21. Найдите решение уравнения $7x + 8y = 30$, состоящее из двух равных чисел.

28.22. Найдите решение уравнения $-12x + 17y = -87$, состоящее из двух противоположных чисел.

28.23. При каком значении a пара чисел $(a; 2a)$ является решением уравнения $2x + 7y = 16$?

28.24. При каком значении a пара чисел $(-4; 2)$ является решением уравнения:

1) $3x + 5y = a$; 2) $ax + 5y = 18$?

28.25. При каком значении a график уравнения $11x - 13y = a + 4$ проходит через начало координат?

28.26. При каком значении a через точку $A\ (5; -3)$ проходит график уравнения:

1) $4x - 9y = a$; 2) $6x - ay = 15$?

28.27. При каком значении a график уравнения $ax + 4y = 0$ проходит через точку:

1) $A\ (12; -4)$; 2) $B\ (0; 2)$; 3) $O\ (0; 0)$?

28.28. При каком значении b график уравнения $5x + by = 0$ проходит через точку:

1) $M\ (-4; -10)$; 2) $N\ (0; 1)$; 3) $K\ (-2; 0)$?

28.29. Графиком каких уравнений является та же прямая, что и график уравнения $2x - 5y = 3$:

1) $4x - 10y = 6$; 3) $2x - 5y = 6$; 5) $x - 2{,}5y = 1{,}5$;
2) $4x - 10y = 3$; 4) $5y - 2x = -3$; 6) $-0{,}4x - y = 0{,}6$?

28.30. Составьте уравнение с двумя переменными по такому условию:

1) длина прямоугольника равна x м, ширина — y м, периметр — 18 м;

2) автобус ехал 4 ч со скоростью x км/ч и 3 ч — со скоростью y км/ч, проехав всего 250 км;

3) тетрадь стоит x р., а ручка — y р., 2 ручки дороже 5 тетрадей на 12 р.;

4) кусок сплава массой x кг, содержащий 12 % меди, и кусок сплава массой y кг, содержащий 20 % меди, сплавили вместе и получили новый сплав, содержащий 9 кг меди;

5) в одном ящике было x кг конфет, а в другом — y кг; после того как из первого ящика переложили во второй 8 кг конфет, в обоих ящиках конфет стало поровну.

28.31. Составьте уравнение с двумя переменными по такому условию:

1) боковая сторона равнобедренного треугольника равна a см, основание — b см, периметр — 32 см;

2) один автомобиль проехал со скоростью x км/ч за 6 ч на 32 км меньше, чем другой автомобиль со скоростью y км/ч проехал за 7 ч;

3) в одном магазине было x ц яблок, а во втором — y ц; за день в первом магазине продали 14 % яблок, а во втором — 18 % яблок, причём во втором магазине продали на 1,2 ц яблок меньше, чем в первом.

28.32. Докажите, что прямые $5y - x = 6$ и $3x - 7y = 6$ пересекаются в точке A (9; 3).

28.33. Докажите, что прямые $4x - 3y = 12$ и $3x + 4y = -66$ пересекаются в точке B (–6; –12).

28.34. Составьте линейное уравнение с двумя переменными, графиком которого является прямая, проходящая через начало координат и точку:

1) A (2; 8); 2) B (–6; 15).

28.35. Составьте линейное уравнение с двумя переменными, графиком которого является прямая, проходящая через начало координат и точку C (8; –12).

28.36. Докажите, что не существует такого значения a, при котором прямая $ax - 3y = 12$ проходит через начало координат.

28.37. При каком значении a точка пересечения прямых $2x - 3y = -6$ и $4x + y = a$ принадлежит оси абсцисс?

28.38. При каком значении b точка пересечения прямых $9x + 7y = 35$ и $x + by = -20$ принадлежит оси ординат?

28.39. При каких значениях a и b прямая $ax + by = 24$ пересекает оси координат в точках A (–6; 0) и B (0; 12)?

28.40. При каких значениях a и b прямая $ax + by = 21$ пересекает оси координат в точках A (3; 0) и B (0; –7)?

28.41. На каком из рисунков 28.4, *а* — *г* изображён график уравнения $x + y = 3$?

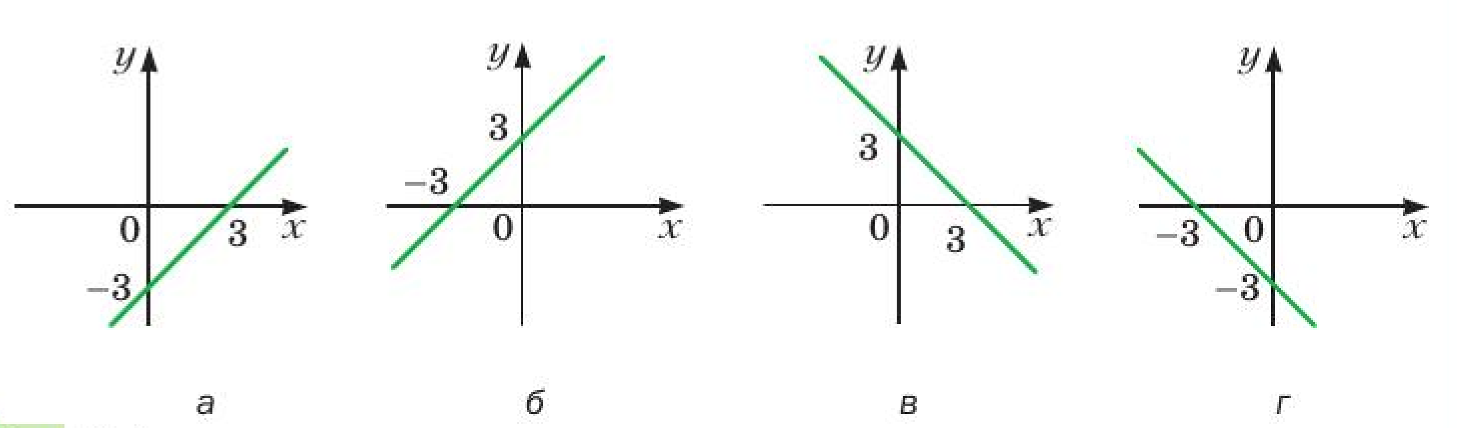


Рис. **28.4**

28.42. На каком из рисунков 28.5, *а* — *г* изображён график уравнения $x - y = -5$?

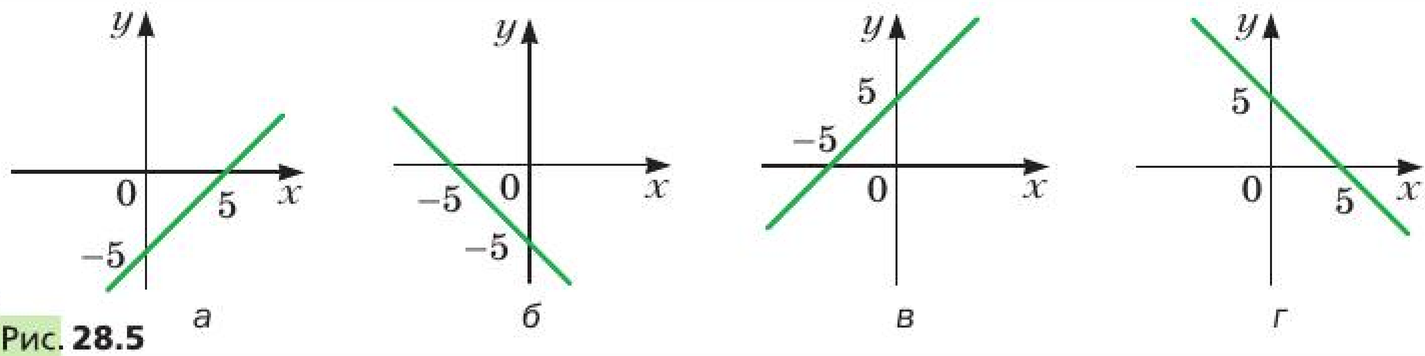


Рис. **28.5**

28.43. Какая из прямых, изображённых на рисунке 28.6, является графиком уравнения:

1) $0x + y = -3$;   3) $3x + 0y = 6$;
2) $2x - y = 1$;   4) $x + 2y = 0$?

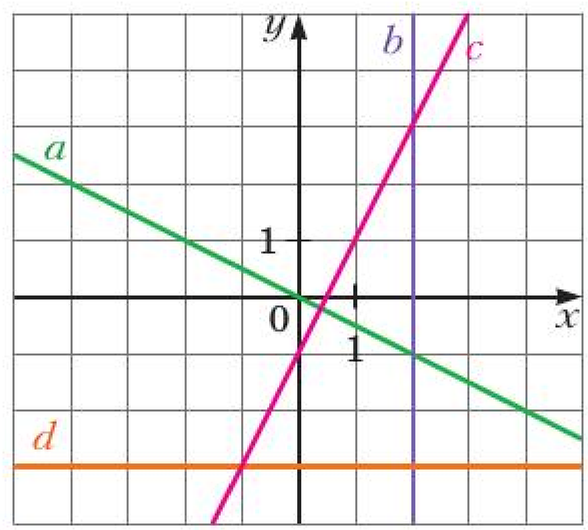


Рис. **28.6**

28.44. Составьте линейное уравнение с двумя переменными, график которого пересекает оси координат в точках:

1) $A\,(-4;\ 0)$ и $B\,(0;\ 2)$;
2) $C\,(0;\ -3)$ и $D\,(5;\ 0)$.

28.45. Составьте линейное уравнение с двумя переменными, график которого проходит через точки $M\,(6;\ 0)$ и $K\,(0;\ 6)$.

28.46. Составьте уравнения, графики которых изображены на рисунке 28.7.

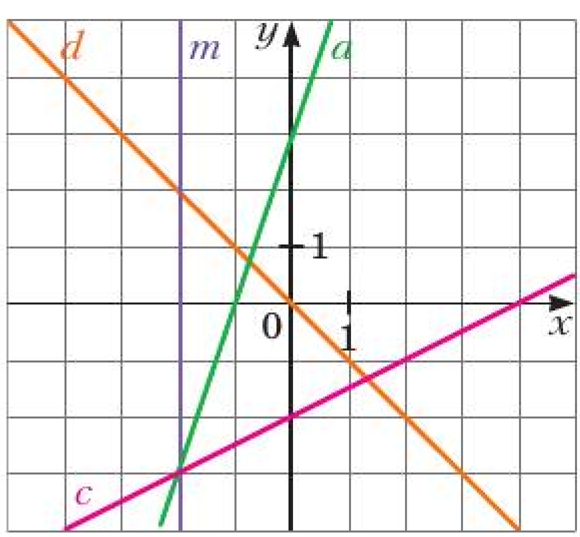


Рис. **28.7**

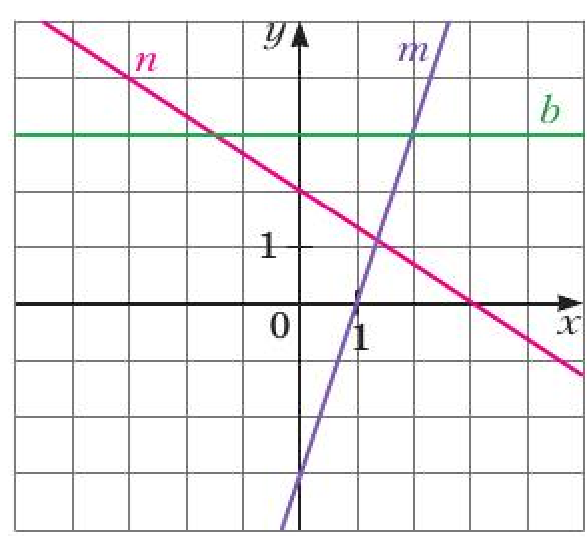


Рис. **28.8**

28.47. Составьте уравнения, графики которых изображены на рисунке 28.8.

◆ ◆ ◆

28.48. Принадлежит ли графику уравнения $13x + 17y = -40$ хотя бы одна точка, у которой обе координаты — положительные числа?

28.49. Принадлежит ли графику уравнения $4x - 8y = 7$ хотя бы одна точка, у которой обе координаты — целые числа?

28.50. Сколько существует пар простых чисел $(x; y)$, являющихся решениями уравнения $5x - 6y = 3$?

Упражнения для повторения

28.51. Две бригады изготовили 840 деталей, причём одна бригада изготовила на 80 % больше деталей, чем другая. Сколько деталей изготовила каждая бригада?

28.52. Докажите, что значение выражения $2^{36} + 4^{100} - 2^{32} - 4^{98}$ кратно числу: 1) 15; 2) 240.

28.53. Решите уравнение:

1) $(x - 8)^2 - (x - 4)(x + 4) = 0$;

2) $(4x - 5)(4x + 5) - (4x - 1)^2 = 9 - 2x$.

28.54. Разложите на множители:

1) $6x^3 - 8x^2 + 3xy - 4y$;

2) $x^4 - 6x^2y + 9y^2 - 16$;

3) $\frac{125x^3}{27} - \frac{m^6n^9}{64}$;

4) $c^2 - 2c - b^2 - 4b - 3$.

КОГДА СДЕЛАНЫ УРОКИ

Как строили мост между геометрией и алгеброй

Идея координат зародилась очень давно. Ведь уже в древности люди изучали Землю, наблюдали звёзды, а по результатам своих исследований составляли карты, схемы.

Во II в. до н. э. древнегреческий учёный Гиппарх впервые использовал идею координат для определения местоположения объектов на поверхности Земли.

Лишь в XIV в. французский учёный Никола Орем (ок. 1323–1392) впервые применил в математике идею Гиппарха: он разбил плоскость на клетки (подобно тому, как на клетки расчерчен ваш тетрадный лист) и стал задавать положение точек широтой и долготой.

Однако огромные возможности применения этой идеи были раскрыты только в XVII в. в работах выдающихся французских математи-

Пьер Ферма́ (1601–1665)

Французский математик, по специальности юрист. Один из основателей теории чисел. Автор ряда выдающихся трудов в разных областях математики, которые оказали значительное влияние на дальнейшее развитие математики.

Рене Декарт (1596–1650)

Французский математик, философ, физик, создатель аналитической геометрии и современной алгебраической символики, автор целого ряда научных открытий в механике и оптике.

ков Пьера Ферма и Рене Декарта. В своих трудах эти учёные показали, как благодаря системе координат можно переходить от точек к числам, от линий к уравнениям, от геометрии к алгебре.

Несмотря на то что П. Ферма опубликовал своё сочинение годом раньше, чем Р. Декарт, ту систему координат, которой мы сегодня пользуемся, называют **декартовой.** Это связано с тем, что Р. Декарт в своей работе «Рассуждения о методе» изобрёл новую удобную буквенную символику, которой с небольшими изменениями мы используем и сегодня. Вслед за ним мы обозначаем переменные последними буквами латинского алфавита x, y, z, а коэффициенты — первыми: a, b, c, ... Привычные нам обозначения степеней x^2, x^3, y^5 и т. д. также ввёл Р. Декарт.

§ 29 Системы уравнений с двумя переменными. Графический метод решения системы двух линейных уравнений с двумя переменными

Легко проверить, что пара чисел (–2; 0) является решением как уравнения $x^2 + y^2 = 4$, так и уравнения $y = x^2 - 4$. В таких случаях говорят, что пара чисел (–2; 0) — **общее решение** указанных уравнений.

На рисунке 29.1 изображены графики уравнений $-6x + 5y = 9$ и $4x + 3y = 13$. Они пересекаются в точке M (1; 3). Эта точка принадлежит каждому из данных графиков. Следовательно, пара чисел (1; 3) является общим решением данных уравнений.

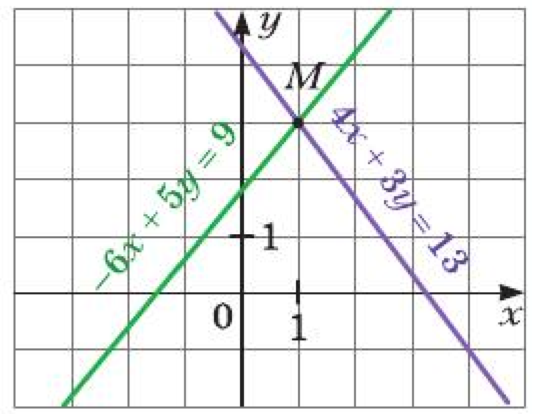


Рис. **29.1**

Если поставлена задача найти стороны прямоугольника, площадь которого равна 12 см^2, а периметр 14 см, то надо найти общее решение уравнений $xy = 12$ и $2x + 2y = 14$, где x см и y см — длины соседних сторон прямоугольника.

Если требуется найти все общие решения нескольких уравнений, то говорят, что нужно решить **систему уравнений**.

Систему уравнений записывают с помощью фигурной скобки.

Рассмотрим запись

$$\begin{cases} -6x + 5y = 9, \\ 4x + 3y = 13. \end{cases} \qquad (1)$$

Это математическая модель задачи о поиске координат общих точек двух прямых (*см.* рис. 29.1).

Запись

$$\begin{cases} xy = 12, \\ 2x + 2y = 14 \end{cases}$$

является математической моделью задачи о поиске сторон прямоугольника, площадь которого равна 12 см^2, а периметр 14 см.

Оба уравнения системы (1) являются линейными. Поэтому данную систему называют **системой двух линейных уравнений с двумя переменными**.

Определение

Решением системы уравнений с двумя переменными называют пару значений переменных, обращающую каждое уравнение в верное равенство.

Из примера, приведённого в начале параграфа, следует, что пара чисел (–2; 0) является решением системы

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 4, \\ y = x^2 - 4. \end{cases}$$

Однако это не означает, что данная система решена.

Определение

Решить систему уравнений — это значит найти все её решения или доказать, что решений нет.

Также можно сказать: **решить систему уравнений — это значит найти множество её решений.**

Пара чисел (–2; 0) не исчерпывает всех решений последней системы. Например, пара чисел (2; 0) — тоже её решение. Эту систему, как и систему, полученную в задаче о прямоугольнике, вы научитесь решать в курсе алгебры 9 класса.

А вот систему

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = -4, \\ y = x^2 - 4 \end{cases}$$

мы можем решить уже сейчас. Очевидно, что первое уравнение этой системы решений не имеет, а значит, не существует и общего решения уравнений, входящих в систему. Отсюда можно сделать вывод: данная система решений не имеет.

Также можно считать решённой систему

$$\begin{cases} -6x + 5y = 9, \\ 4x + 3y = 13. \end{cases}$$

Действительно, графики уравнений системы пересекаются в точке M (1; 3) (см. рис. 29.1). Её координаты являются решением каждого уравнения системы, а значит, и самой системы. Других общих точек графики уравнений не имеют, а следовательно, не имеет других решений и сама система. Вывод: пара чисел (1; 3) — единственное решение данной системы.

Описанный метод решения системы уравнений называют **графическим.**

Его суть состоит в следующем.

Чтобы решить систему линейных уравнений с двумя переменными графическим методом, нужно:

1) построить на одной координатной плоскости графики уравнений, входящих в систему;

2) найти координаты всех точек пересечения построенных графиков;

3) полученные пары чисел и будут искомыми решениями.

Не всякую систему уравнений удобно решать графически. Например, если пара $\left(\frac{1}{17}; -\frac{36}{85}\right)$ является решением какой-то системы, то понятно, что установить этот факт графически крайне сложно. А потому графический метод обычно применяют в тех случаях, когда решение достаточно найти приближённо. А то, что пара чисел (1; 3) является решением системы $\begin{cases} -6x + 5y = 9, \\ 4x + 3y = 13, \end{cases}$ подтверждает непосредственная подстановка этой пары в каждое из уравнений системы, т. е. проверка.

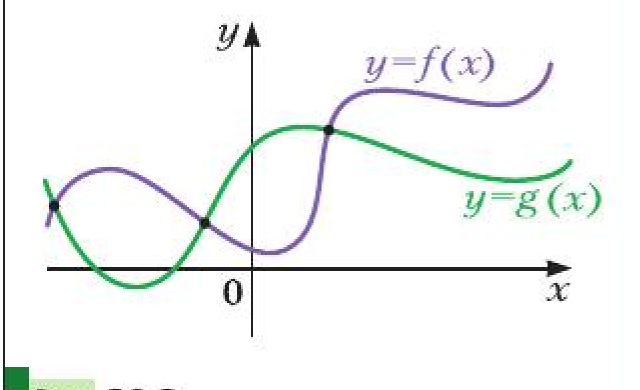


Рис. **29.2**

Графический метод эффективен в тех случаях, когда требуется определить количество решений системы. Например, на рисунке 29.2 изображены графики некоторых функций $y = f(x)$ и $y = g(x)$. Данные графики имеют три общие точки. Это позволяет утверждать, что система $\begin{cases} y = f(x), \\ y = g(x) \end{cases}$ имеет три решения.

Выясним, сколько решений может иметь система двух линейных уравнений с двумя переменными.

Если одно из уравнений системы не имеет решений, то вся система решений не имеет.

Рассмотрим случай, когда каждое из уравнений системы имеет решения.

Если графиком одного из уравнений системы является вся плоскость, то очевидно, что система имеет бесконечно много решений.

Действительно, плоскость и проведённая на ней прямая имеют бесконечно много общих точек.

Например, система $\begin{cases} 0x + 0y = 0, \\ 2x - 3y = 15 \end{cases}$ имеет бесконечно много решений.

Если графиками уравнений, входящих в систему линейных уравнений, являются прямые, то количество решений этой системы зависит от взаимного расположения двух прямых на плоскости:

1) если прямые пересекаются, то система имеет единственное решение;

2) если прямые совпадают, то система имеет бесконечно много решений;

3) если прямые параллельны, то система решений не имеет.

Пример, соответствующий случаю, когда система имеет единственное решение, мы уже рассмотрели выше. Это система $\begin{cases} -6x + 5y = 9, \\ 4x + 3y = 13. \end{cases}$

Теперь обратимся к примерам, которые иллюстрируют случаи 2 и 3.

Так, если в системе

$$\begin{cases} \dfrac{x}{2} - y = 1, \\ x - 2y = 2 \end{cases}$$

обе части первого уравнения умножить на 2, то решения этого уравнения, а значит, и всей системы не изменятся.

Имеем:

$$\begin{cases} x - 2y = 2, \\ x - 2y = 2. \end{cases}$$

Очевидно, что решения этой системы совпадают с решениями уравнения $x - 2y = 2$. Но это уравнение имеет бесконечно много решений, а следовательно, и рассматриваемая система имеет бесконечно много решений.

Приведём пример системы, которая не имеет решений:

$$\begin{cases} \dfrac{2}{3}x + y = 2, \\ 2x + 3y = 7. \end{cases}$$

Действительно, умножим обе части первого уравнения системы на 3. Получим:

$$\begin{cases} 2x + 3y = 6, \\ 2x + 3y = 7. \end{cases}$$

Понятно, что не существует такой пары значений x и y, при которых выражение $2x + 3y$ одновременно принимает значения и 6, и 7.

В завершение подчеркнём, что именно графический метод нам подсказал, что не существует системы линейных уравнений, имеющей, например, ровно 2, или ровно 3, или ровно 100 и т. п. решений.

? **1.** В каком случае говорят, что надо решить систему уравнений?

2. Что является решением системы уравнений с двумя переменными?

3. Что означает решить систему уравнений?

4. В чём суть графического метода решения систем уравнений с двумя переменными?

5. Сколько решений может иметь система двух линейных уравнений с двумя переменными?

6. Каково взаимное расположение прямых, являющихся графиками двух линейных уравнений с двумя переменными, составляющих систему уравнений, если:

1) система имеет единственное решение;

2) система не имеет решений;

3) система имеет бесконечно много решений?

Упражнения

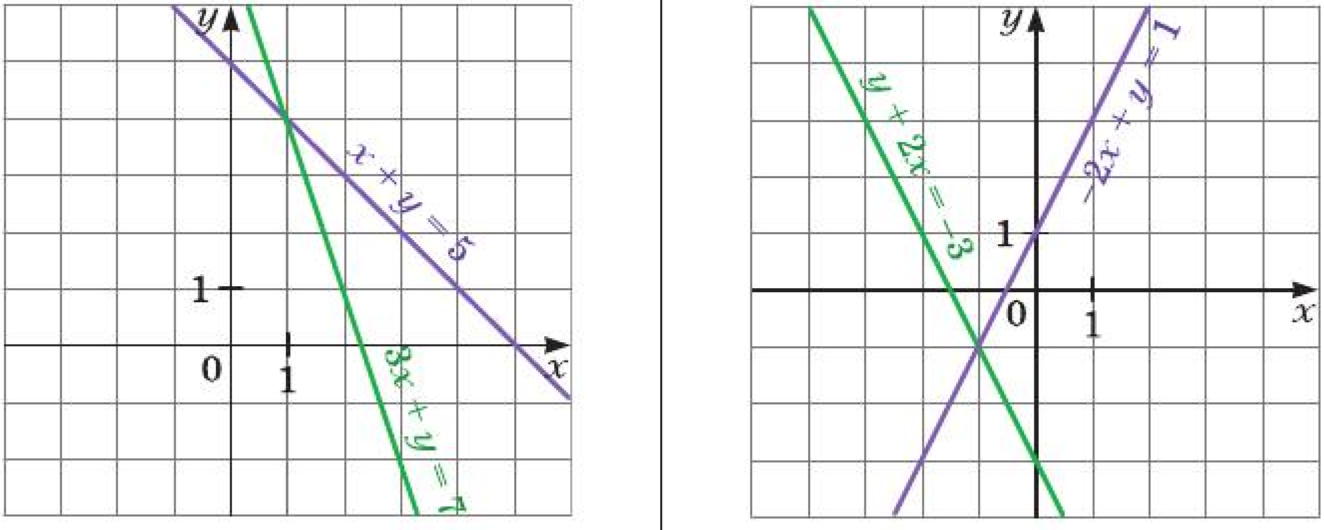
29.1. Какая из пар чисел (–2; 1), (2; –1), (6; 4), (8; –4) является решением системы уравнений

$$\begin{cases} 3x - 8y = -14, \\ 4x + y = 28? \end{cases}$$

29.2. Решением каких систем является пара чисел (–5; 2):

1) $\begin{cases} 7x + 2y = 31, \\ 4x - 5y = -30; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 3y - 2x = 16, \\ 6x + 7y = -16; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x - 2y = -9, \\ 10y - x = 15? \end{cases}$

29.3. Определите координаты точки пересечения прямых, изображённых на рисунке 29.3. Запишите соответствующую систему уравнений, проверьте найденное решение системы, подставив координаты точки пересечения прямых в уравнения системы.



а б

Рис. 29.3

29.4. Решите графически систему уравнений:

1) $\begin{cases} x - y = 1, \\ x + 2y = 7; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 2x + 3y = 6, \\ 3x - y = 9; \end{cases}$

2) $\begin{cases} x + y = 0, \\ 3x - y = 4; \end{cases}$ 5) $\begin{cases} 2x + y = 8, \\ 2x - y = 0; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x + y = -5, \\ 4x - y = -5; \end{cases}$ 6) $\begin{cases} 7x - 3y = -26, \\ y - 2x = 8. \end{cases}$

29.5. Решите графически систему уравнений:

1) $\begin{cases} x + 2y = 0, \\ 5x + y = -18; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x - 2y = 1, \\ y - x = -2; \end{cases}$

2) $\begin{cases} 2x - 5y = 10, \\ 4x - y = 2; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x + y = -3, \\ x - y = -1. \end{cases}$

29.6. Составьте какую-нибудь систему двух линейных уравнений с двумя переменными, решением которой является пара значений переменных:

1) $x = 3$, $y = 2$; 2) $x = -4$, $y = 1$; 3) $x = 5$, $y = 0$.

29.7. Составьте какую-нибудь систему двух линейных уравнений с двумя переменными, решением которой является пара чисел $(2; -2)$.

29.8. Пара чисел $(6; 4)$ является решением системы уравнений:

1) $\begin{cases} ax + 2y = 26, \\ 4x + by = 14; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 5x + by = 6, \\ ax + by = 0. \end{cases}$

Найдите значения a и b.

29.9. При каких значениях a и b пара чисел $(-2; 3)$ является решением системы уравнений $\begin{cases} ax - 3y = -13, \\ 7x + by = 1? \end{cases}$

29.10. Имеет ли решение система уравнений:

1) $\begin{cases} 2x - 7y = 6, \\ 8x - 28y = 24; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2x + y = -2, \\ 6x + 3y = 9; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x + 2y = 0,5, \\ 2x + 4y = 2? \end{cases}$

29.11. Имеет ли решение система уравнений:

1) $\begin{cases} x - y = 4, \\ 3x - 3y = 6; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x - 1,5y = -4, \\ 3y - 2x = 8; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} 9x + 9y = 18, \\ x + y = 2? \end{cases}$

29.12. К уравнению $2x - 3y = 6$ подберите второе линейное уравнение так, чтобы получилась система уравнений, которая:

1) имеет единственное решение;
2) имеет бесконечно много решений;
3) не имеет решений.

29.13. К уравнению $x - y = 2$ подберите второе линейное уравнение так, чтобы получилась система уравнений, которая:

1) имеет единственное решение;
2) имеет бесконечно много решений;
3) не имеет решений.

29.14. При каких значениях a не имеет решений система уравнений
$\begin{cases} 8x + 9y = 7, \\ 8x + 9y = a? \end{cases}$

29.15. При каком значении a имеет бесконечно много решений система уравнений:

1) $\begin{cases} x + 5y = 4, \\ 4x + 20y = a; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 3x + ay = 12, \\ 9x - 15y = 36? \end{cases}$

29.16. При каких значениях a система уравнений:

1) $\begin{cases} 7x - 12y = 14, \\ 7x - 12y = a \end{cases}$ не имеет решений;

2) $\begin{cases} 6x + ay = 4, \\ 3x - 5y = 2 \end{cases}$ имеет бесконечно много решений?

29.17. Подберите такие значения a и b, при которых система уравнений $\begin{cases} x - 2y = 3, \\ ax + 4y = b: \end{cases}$

1) имеет бесконечно много решений;
2) имеет единственное решение;
3) не имеет решений.

29.18. Подберите такие значения m и n, при которых система уравнений $\begin{cases} x + y = 5, \\ 3x - my = n: \end{cases}$

1) имеет бесконечно много решений;
2) имеет единственное решение;
3) не имеет решений.

29.19. Решите графически систему уравнений:

1) $\begin{cases} |x| - y = 0, \\ x - y = -4; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} y + |x| = 0, \\ x + y = 2; \end{cases}$

2) $\begin{cases} |x| - y = 0, \\ x + 3y = 4; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x - |y| = 0, \\ 2x - y = 3. \end{cases}$

29.20. Решите графически систему уравнений:

1) $\begin{cases} x^2 - y^2 = 0, \\ x + 2y = 3; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} |y - 2x| = 3, \\ x - 2y = 0; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x^2 - 2xy + y^2 = 4, \\ |x + y| = 2. \end{cases}$

Упражнения для повторения

29.21. Кусок сплава меди и олова массой 5,5 кг содержит меди на 20 % больше, чем олова. Найдите массу меди в этом сплаве.

29.22. Из Перми в Соликамск, расстояние между которыми равно 200 км, выехал автобус. Через 32 мин после отправления автобуса навстречу ему из Соликамска выехал автомобиль со скоростью на 20 км/ч большей, чем скорость автобуса. С какой скоростью двигался автобус, если они встретились через 1,2 ч после отправления автомобиля?

29.23. Найдите четыре последовательных нечётных натуральных числа, сумма квадратов которых равна 164.

29.24. Докажите, что если $x + y = a - 1$, то $ax + x + ay + y + 1 = a^2$.

29.25. Остаток при делении числа a на 5 равен 4, а остаток при делении на 5 числа b равен 3. Докажите, что значение выражения $a^2 + b^2$ кратно 5.

§ 30 Решение систем линейных уравнений методом подстановки

Если математикам встречается новая задача, то, как правило, они пытаются её решение свести к уже знакомой задаче.

Покажем, как решение системы линейных уравнений с двумя переменными можно свести к решению линейного уравнения с одной переменной. А последнюю задачу вы умеете решать.

Решим систему уравнений

$$\begin{cases} 2x - y = 8, \\ 3x + 2y = 5. \end{cases} \qquad (1)$$

Из первого уравнения выразим переменную y через переменную x:

$$y = 2x - 8.$$

Подставим во второе уравнение системы вместо переменной y выражение $2x - 8$. Получим систему

$$\begin{cases} 2x - y = 8, \\ 3x + 2(2x - 8) = 5. \end{cases} \qquad (2)$$

Эта и исходная системы имеют одни и те же решения, т. е. множества их решений совпадают. Докажем это.

Пусть пара $(x_0;\ y_0)$ является решением системы (1). Тогда верны числовые равенства $2x_0 - y_0 = 8$ и $3x_0 + 2y_0 = 5$. Из первого равенства получаем, что $y_0 = 2x_0 - 8$. Заменим во втором равенстве число y_0 на равное ему число $2x_0 - 8$. Получим: $3x_0 + 2(2x_0 - 8) = 5$. Следовательно, выполняются два равенства: $2x_0 - y_0 = 8$ и $3x_0 + 2(2x_0 - 8) = 5$. Это означает, что пара $(x_0;\ y_0)$ является решением системы (2).

Пусть пара $(x_1; y_1)$ является решением системы (2). Тогда верны числовые равенства $2x_1 - y_1 = 8$ и $3x_1 + 2(2x_1 - 8) = 5$. Из первого равенства получаем, что $y_1 = 2x_1 - 8$. Заменим во втором равенстве число $2x_1 - 8$ на равное ему число y_1. Получим: $3x_1 + 2y_1 = 5$. Следовательно, выполняются два равенства: $2x_1 - y_1 = 8$ и $3x_2 + 2y_1 = 5$. Это означает, что пара $(x_1; y_1)$ является решением системы (1).

Итак, мы показали, что каждое решение системы (1) является решением системы (2) и наоборот — каждое решение системы (2) является решением системы (1). Следовательно, множества решений систем (1) и (2) совпадают.

Значит, чтобы решить систему (1), достаточно решить систему (2).

Второе уравнение системы (2) является уравнением с одной переменной. Решим его:

$$3x + 2(2x - 8) = 5;$$
$$3x + 4x - 16 = 5;$$
$$7x = 21;$$
$$x = 3.$$

Подставим найденное значение переменной x в уравнение $y = 2x - 8$. Получим:

$$y = 2 \cdot 3 - 8;$$
$$y = -2.$$

Пара чисел $(3; -2)$ — искомое решение.

Описанный здесь способ решения системы называют **методом подстановки**.

Чтобы решить систему линейных уравнений методом подстановки, нужно:

1) выразить из любого уравнения системы одну переменную через другую;

2) подставить в другое уравнение системы вместо этой переменной выражение, полученное на первом шаге;

3) решить уравнение с одной переменной, полученное на втором шаге;

4) подставить найденное значение переменной в выражение, полученное на первом шаге;

5) вычислить значение другой переменной;

6) записать ответ.

Эту последовательность действий можно назвать **алгоритмом** решения системы двух линейных уравнений с двумя переменными методом подстановки.

Упражнения

30.1. Решите систему уравнений:

1) $\begin{cases} y = 3x - 1, \\ 2x + y = 9; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 2x + y = 10, \\ 4x - 7y = 2; \end{cases}$ 7) $\begin{cases} 15 - x = 2y, \\ 4x - 3y = 27; \end{cases}$

2) $\begin{cases} x = 2y - 8, \\ x - 4y = 4; \end{cases}$ 5) $\begin{cases} 5y - x = 8, \\ 5x - 4y = 23; \end{cases}$ 8) $\begin{cases} 5x - y = 6{,}2, \\ 0{,}8x + 3y = 13. \end{cases}$

3) $\begin{cases} x = 6y, \\ x + 5y = 88; \end{cases}$ 6) $\begin{cases} 3x + 4y = 0, \\ 2x - 5y = 46; \end{cases}$

30.2. Найдите решение системы уравнений:

1) $\begin{cases} 4x + y = 12, \\ 7x + 2y = 20; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} 4y - x = 11, \\ 5x - 2y = 17; \end{cases}$ 5) $\begin{cases} x + y = 7, \\ 9y - 2x = -25; \end{cases}$

2) $\begin{cases} x - 2y = 5, \\ 3x + 8y = 1; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 6x - y = -1, \\ 2x - 3y = -11; \end{cases}$ 6) $\begin{cases} 5x - 3y = 0, \\ 15x + 2y = 55. \end{cases}$

30.3. Решите систему уравнений:

1) $\begin{cases} 4x - 3y = 15, \\ 3x - 4y = 6; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} 5y - 6x = 4, \\ 7x - 4y = -1; \end{cases}$ 5) $\begin{cases} 5a - 4b = 3, \\ 2a - 3b = 11; \end{cases}$

2) $\begin{cases} 2x - 3y = 2, \\ 5x + 2y = 24; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 4x + 5y = 1, \\ 8x - 2y = 38; \end{cases}$ 6) $\begin{cases} 8m - 2n = 11, \\ 9m + 4n = 8. \end{cases}$

30.4. Решите систему уравнений:

1) $\begin{cases} 5x + 2y = 15, \\ 8x + 3y = 20; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} 8p - 5q = -11, \\ 5p - 4q = -6; \end{cases}$

2) $\begin{cases} 7x + 4y = 5, \\ 3x + 2y = 3; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 6u - 5v = -38, \\ 2u + 7v = 22. \end{cases}$

30.5. Найдите решение системы уравнений:

1) $\begin{cases} 6 - 5(x - y) = 7x + 4y, \\ 3(x + 1) - (6x + 8y) = 69 + 3y; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} 6y - 5x = 1, \\ \dfrac{x - 1}{2} + \dfrac{3y - x}{4} = -4\dfrac{3}{4}; \end{cases}$

2) $\begin{cases} \dfrac{x}{2} - \dfrac{y}{3} = 2, \\ 5x - y = 34; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} \dfrac{1{,}5x - 3}{3} + \dfrac{7 - 3y}{8} = 3, \\ \dfrac{2{,}5x - 2}{3} - \dfrac{2y + 1}{6} = x - 0{,}5. \end{cases}$

30.6. Решите систему уравнений:

1) $\begin{cases} 6x + 3 = 5x - 4(5y + 4), \\ 3(2x - 3y) - 6x = 8 - y; \end{cases}$

2) $\begin{cases} \dfrac{x+3}{2} - \dfrac{y-4}{7} = 1, \\ 6y - x = 5; \end{cases}$

3) $\begin{cases} \dfrac{x+y}{8} + \dfrac{x-y}{6} = 4, \\ \dfrac{3x+y}{4} - \dfrac{2x-5y}{3} = 5. \end{cases}$

Упражнения для повторения

30.7. В школе 50 % учащихся занимаются в спортивных секциях, из них 6 % поют в хоре. Сколько процентов учащихся школы одновременно занимаются спортом и поют в хоре?

30.8. Функция задана формулой $y = 6 - kx$. При каком значении k график функции проходит через точку $A\ (4; -2)$?

30.9. Докажите, что значение выражения $2^{4n} - 1$ делится нацело на 5 при любом натуральном значении n.

30.10. Найдите три последние цифры значения выражения $2376^3 + 1624^3$.

§ 31 Решение систем линейных уравнений методом сложения

Рассмотрим ещё один способ, позволяющий свести решение системы двух линейных уравнений с двумя переменными к решению линейного уравнения с одной переменной.

Решим систему уравнений

$$\begin{cases} 2x - 5y = 7, \\ 4x + 5y = 5. \end{cases}$$

Поскольку в этой системе коэффициенты при переменной y — противоположные числа, то уравнение с одной переменной можно получить, сложив почленно левые и правые части уравнений системы. Запишем:

$$2x - 5y + 4x + 5y = 7 + 5;$$
$$6x = 12;$$
$$x = 2.$$

Подставить найденное значение переменной x можно в любое из уравнений системы. Подставим, например, в первое. Получим:

$$2 \cdot 2 - 5y = 7;$$

$$-5y = 3;$$
$$y = -0{,}6.$$

Итак, решением системы является пара чисел $(2; -0{,}6)$.

Описанный способ решения системы называют **методом сложения**.

Этот метод основан на следующем утверждении: *если одно из уравнений системы заменить уравнением, полученным путём сложения левых и правых частей уравнений системы, то полученная система будет иметь те же решения, что и исходная.*

Так, решая систему $\begin{cases} 2x - 5y = 7, \\ 4x + 5y = 5, \end{cases}$ мы заменили её системой $\begin{cases} 2x - 5y + 4x + 5y = 7 + 5, \\ 2x - 5y = 7. \end{cases}$

Множества решений этих двух систем совпадают.

В предыдущем параграфе при рассмотрении метода подстановки было доказано совпадение множеств решений двух систем. Воспользовавшись изложенной там идеей, докажите самостоятельно, что множества решений рассматриваемых систем совпадают.

Решим ещё одну систему:

$$\begin{cases} 2x - 3y = 11, \\ 6x + 5y = 19. \end{cases}$$

Если мы сложим почленно левые и правые части уравнений системы, то вновь получим уравнение с двумя переменными. Данная система ещё «не готова» к применению метода сложения.

Умножим обе части первого уравнения на -3. Получим систему, множество решений которой совпадает с множеством решений исходной системы:

$$\begin{cases} -6x + 9y = -33, \\ 6x + 5y = 19. \end{cases}$$

Для такой системы метод сложения уже является эффективным. Имеем:

$$-6x + 9y + 6x + 5y = -33 + 19;$$
$$14y = -14;$$
$$y = -1.$$

Подставим найденное значение y в первое уравнение исходной системы. Получим:

$$2x - 3 \cdot (-1) = 11;$$
$$2x = 8;$$
$$x = 4.$$

Пара чисел $(4; -1)$ — искомое решение.

Рассмотрим систему, в которой сразу два уравнения нужно подготовить к применению метода сложения:

$$\begin{cases} 7x + 8y = 9, \\ 3x + 5y = 7. \end{cases}$$

Чтобы исключить переменную y, умножим обе части первого уравнения на число 5, а второго — на число -8. Получим следующую систему:

$$\begin{cases} 35x + 40y = 45, \\ -24x - 40y = -56. \end{cases}$$

Сложим почленно левые и правые части уравнений этой системы:

$$35x + 40y - 24x - 40y = 45 - 56;$$
$$11x = -11;$$
$$x = -1.$$

Подставив найденное значение x в первое уравнение данной системы, получим:

$$-7 + 8y = 9;$$
$$y = 2.$$

Следовательно, пара чисел $(-1; 2)$ — решение данной системы.

Чтобы решить систему линейных уравнений методом сложения, нужно:

1) подобрав «выгодные» множители, преобразовать одно или оба уравнения системы так, чтобы коэффициенты при одной из переменных стали противоположными числами;

2) сложить почленно левые и правые части уравнений, полученных на первом шаге;

3) решить уравнение с одной переменной, полученное на втором шаге;

4) подставить найденное на третьем шаге значение переменной в любое из уравнений исходной системы;

5) вычислить значение другой переменной;

6) записать ответ.

Эту последовательность действий можно назвать алгоритмом решения системы двух линейных уравнений с двумя переменными методом сложения.

Упражнения

31.1. Решите систему уравнений методом сложения:

1) $\begin{cases} x + y = 6, \\ x - y = 8; \end{cases}$
2) $\begin{cases} 3x + y = 14, \\ 5x - y = 10; \end{cases}$
3) $\begin{cases} 2x - 9y = 11, \\ 7x + 9y = 25; \end{cases}$
4) $\begin{cases} -6x + y = 16, \\ 6x + 4y = 34; \end{cases}$
5) $\begin{cases} 8x + y = 8, \\ 12x + y = 4; \end{cases}$
6) $\begin{cases} 7x - 5y = 29, \\ 7x + 8y = -10. \end{cases}$

31.2. Решите систему уравнений методом сложения:

1) $\begin{cases} 4x - y = 20, \\ 4x + y = 12; \end{cases}$
2) $\begin{cases} 9x + 17y = 52, \\ 26x - 17y = 18; \end{cases}$
3) $\begin{cases} -5x + 7y = 2, \\ 8x + 7y = 15; \end{cases}$
4) $\begin{cases} 9x - 6y = 24, \\ 9x + 8y = 10. \end{cases}$

31.3. Решите систему уравнений методом сложения:

1) $\begin{cases} x - 3y = 5, \\ 4x + 9y = 41; \end{cases}$
2) $\begin{cases} 10x + 2y = 12, \\ -5x + 4y = -6; \end{cases}$
3) $\begin{cases} 3x - 2y = 1, \\ 12x + 7y = -26; \end{cases}$
4) $\begin{cases} 3x + 8y = 13, \\ 2x - 3y = 17; \end{cases}$
5) $\begin{cases} 3x - 4y = 16, \\ 5x + 6y = 14; \end{cases}$
6) $\begin{cases} 2x + 3y = 6, \\ 3x + 5y = 8; \end{cases}$
7) $\begin{cases} 5u - 7v = 24, \\ 7u + 6v = 2; \end{cases}$
8) $\begin{cases} 0{,}2x + 1{,}5y = 10, \\ 0{,}4x - 0{,}3y = 0{,}2. \end{cases}$

31.4. Решите систему уравнений методом сложения:

1) $\begin{cases} 5x + y = 7, \\ 7x - 4y = -1; \end{cases}$
2) $\begin{cases} 6x - 5y = 23, \\ 2x - 7y = 13; \end{cases}$
3) $\begin{cases} 5x - 2y = 16, \\ 8x + 3y = 38; \end{cases}$
4) $\begin{cases} 5x - 4y = 10, \\ 2x - 3y = -3; \end{cases}$
5) $\begin{cases} 4a + 6b = 9, \\ 3a - 5b = 2; \end{cases}$
6) $\begin{cases} 9m - 13n = 22, \\ 2m + 3n = -1. \end{cases}$

31.5. Решите систему уравнений:

1) $\begin{cases} 2(4x-5)-3(3+4y)=5, \\ 7(6y-1)-(4+3x)=21y-86; \end{cases}$

2) $\begin{cases} -2(2x+1)+2,5=3(y+2)-8x, \\ 8-5(4-x)=6y-(5-x); \end{cases}$

3) $\begin{cases} \dfrac{x}{2}-\dfrac{y}{3}=3, \\ \dfrac{3x}{4}+\dfrac{5y}{6}=4; \end{cases}$

4) $\begin{cases} \dfrac{x+2}{6}-\dfrac{y-3}{15}=1, \\ \dfrac{x+2,5}{9}-\dfrac{y+3}{6}=\dfrac{1}{3}. \end{cases}$

31.6. Решите систему уравнений:

1) $\begin{cases} 0,2x-0,3(2y+1)=1,5, \\ 3(x+1)+3y=2y-2; \end{cases}$

2) $\begin{cases} \dfrac{15x-3y}{4}+\dfrac{3x+2y}{6}=3, \\ \dfrac{3x+y}{3}-\dfrac{x-3y}{2}=6. \end{cases}$

31.7. Найдите решение системы уравнений:

1) $\begin{cases} (x-3)^2-4y=(x+2)(x+1)-6, \\ (x-4)(y+6)=(x+3)(y-7)+3; \end{cases}$

2) $\begin{cases} (x-y)(x+y)-x(x+10)=y(5-y)+15, \\ (x+1)^2+(y-1)^2=(x+4)^2+(y+2)^2-18. \end{cases}$

31.8. Решите систему уравнений:

1) $\begin{cases} (2x+1)^2-(2x-y)(2x+y)=(y+8)(y-10), \\ 4x(x-5)-(2x-3)(2x-9)=6y-104; \end{cases}$

2) $\begin{cases} (x-2)\left(x^2+2x+4\right)-x(x-4)(x+4)=20-20y, \\ (3x-2)(4y+5)=2y(6x-1)-58. \end{cases}$

31.9. Найдите, не выполняя построения, координаты точки пересечения прямых:

1) $y=2-3x$ и $2x+3y=7$;

2) $5x+6y=-20$ и $2x+9y=25$.

31.10. Найдите, не выполняя построения, координаты точки пересечения прямых:

1) $2x-3y=8$ и $7x-5y=-5$;

2) $9x+y=3$ и $8x+3y=-10$.

31.11. При каких значениях a и b график уравнения $ax+by=8$ проходит через точки A (1; 3) и B (2; –4)?

31.12. При каких значениях m и n график уравнения $mx-ny=6$ проходит через точки C (2; –1) и D (–6; 5)?

31.13. Запишите уравнение прямой $y = kx + b$, проходящей через точки:
1) M (2; 1) и K (–3; 2); 2) P (–4; 5) и Q (4; –3).

31.14. Запишите уравнение прямой $y = kx + b$, проходящей через точки:
1) A (3; 2) и B (–1; 4); 2) C (–2; –3) и D (1; 6).

31.15. Имеет ли решение система уравнений:

1) $\begin{cases} 2x + y = 5, \\ 3x - 4y = 24, \\ x - 2y = 9; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2x + 3y = -1, \\ 3x + 5y = 1, \\ 5x + 9y = 5? \end{cases}$

31.16. Решите систему уравнений:

1) $\begin{cases} 6x + 5y = 10, \\ 8x - 5y = 32, \\ 3x + 10y = -7; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x - 2y = 1, \\ 2x + y = 7, \\ 4x + y = 14. \end{cases}$

31.17. Запишите систему линейных уравнений с двумя переменными, графики которых изображены на рисунке 31.1.

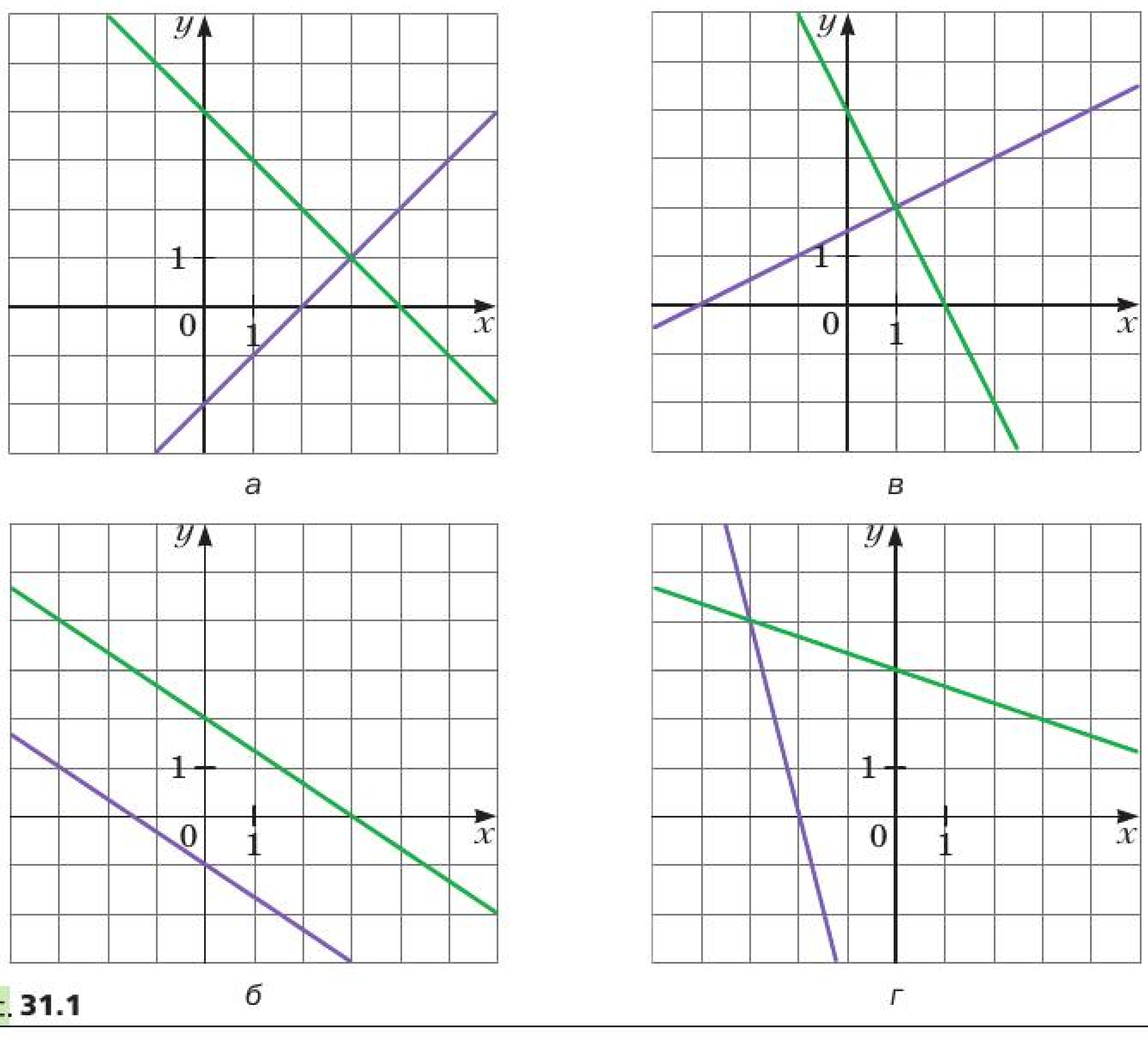


Рис. 31.1

31.18. Запишите систему линейных уравнений с двумя переменными, графики которых изображены на рисунке 31.2.

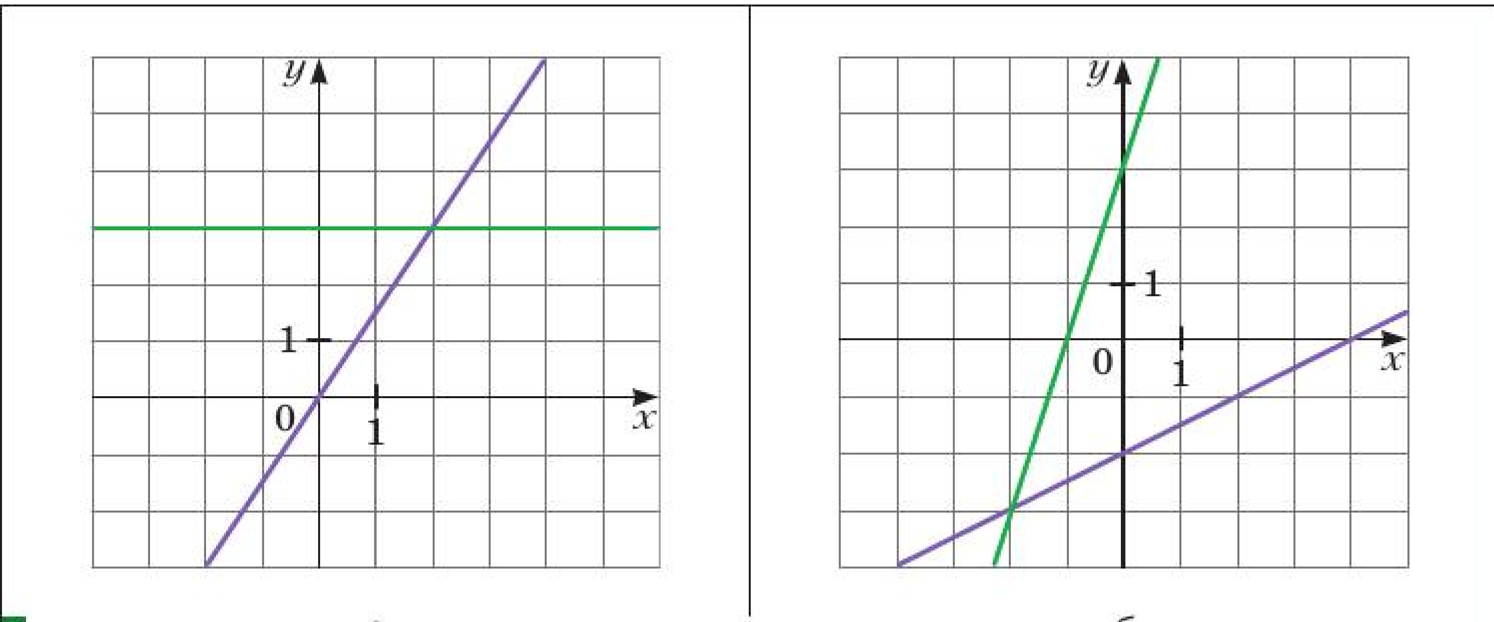


Рис. **31.2**

31.19. При каком значении k прямая $y = kx + 2$ проходит через точку пересечения прямых $3x + 5y = 5$ и $7x - 4y = 43$?

31.20. При каком значении a имеет решение система уравнений:

$$\begin{cases} 8x - 7y = 21, \\ 5x - 3y = 20, \\ ax + 2y = 24? \end{cases}$$

31.21. Решите уравнение:

1) $(x + y)^2 + (x - 3)^2 = 0$;
2) $(x + 2y - 3)^2 + x^2 - 4xy + 4y^2 = 0$;
3) $|x - 3y - 6| + (9x + 6y - 32)^2 = 0$;
4) $x^2 + y^2 + 10x - 12y + 61 = 0$;
5) $25x^2 + 10y^2 - 30xy + 8y + 16 = 0$.

31.22. Решите уравнение:

1) $(x - 2y)^2 + (y - 5)^2 = 0$;
2) $(4x + 2y - 5)^2 + |4x - 6y + 7| = 0$;
3) $50x^2 + 4y^2 - 28xy + 16x + 64 = 0$.

31.23. Решите систему уравнений:

1) $\begin{cases} \dfrac{2}{x} + \dfrac{5}{y} = 15, \\ \dfrac{3}{x} + \dfrac{8}{y} = 23; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \dfrac{5}{2x - 3y} + \dfrac{10}{3x - 2y} = 3, \\ \dfrac{20}{3x - 2y} - \dfrac{15}{2x - 3y} = 1. \end{cases}$

31.24. Решите систему уравнений:

1) $\begin{cases} \dfrac{1}{x} - \dfrac{7}{y} = 6, \\ \dfrac{2}{x} + \dfrac{3}{y} = 46; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \dfrac{9}{x+4y} - \dfrac{6}{5x-y} = -2, \\ \dfrac{3}{x+4y} + \dfrac{18}{5x-y} = 1. \end{cases}$

Упражнения для повторения

31.25. Найдите значение выражения:

1) $(a^2+1)^2 + (a-1)(a^2+1) - a^2$, если $a = -2$;

2) $(a-1)(a^2+1)(a+1) - (a^2+1)^2$, если $a = \dfrac{1}{2}$.

31.26. На математической олимпиаде участникам было предложено решить 12 задач. За каждую правильно решённую задачу начисляли 5 баллов, а за нерешённую — снимали 3 балла. Сколько задач решил правильно учащийся, получивший всего 36 баллов?

31.27. (*Задача из немецкого фольклора.*) За какое время лев, волк и собака могут съесть трёх овец, если лев один может съесть овцу за 1 ч, волк — за 3 ч, а собака — за 6 ч?

31.28. Докажите, что разность квадратов двух произвольных натуральных чисел, каждое из которых не делится нацело на 3, кратна 3.

31.29. Деревьев в саду больше, чем 90, но меньше, чем 100. Треть всех деревьев — яблони, а четверть всех деревьев — сливы. Сколько деревьев в саду?

31.30. Какое из выражений принимает только отрицательные значения при любом значении x:

1) $-x^2 - 4x + 6$; 2) $-x^2 + 16x - 64$; 3) $-x^2 + 8x - 18$?

§ 32 Решение задач с помощью систем линейных уравнений

Рассмотрим задачи, в которых системы двух линейных уравнений с двумя переменными используют как математические модели реальных ситуаций.

Пример 1. На пошив 1 платья и 4 юбок пошло 9 м ткани, а на 3 таких же платья и 8 таких же юбок — 21 м ткани. Сколько ткани надо для пошива 1 платья? 1 юбки?

Решение. Пусть на 1 платье идёт x м ткани, а на 1 юбку — y м. Тогда на 1 платье и 4 юбки идёт $(x + 4y)$ м ткани, что по условию составляет 9 м. Следовательно, $x + 4y = 9$.

На 3 платья и 8 юбок надо $(3x + 8y)$ м ткани, или 21 м. Значит, $3x + 8y = 21$.

Составим систему уравнений:

$$\begin{cases} x + 4y = 9, \\ 3x + 8y = 21. \end{cases}$$

Решив эту систему, получаем: $x = 3$, $y = 1{,}5$. Следовательно, на пошив 1 платья идёт 3 м ткани, а 1 юбки — 1,5 м.

Ответ: 3 м, 1,5 м. ■

Пример 2. Из города A в город B, расстояние между которыми 264 км, выехал мотоциклист. Через 2 ч после этого навстречу ему из города B выехал велосипедист, который встретился с мотоциклистом через 1 ч после своего отправления. Найдите скорость каждого из них, если за 2 ч мотоциклист проезжает на 40 км больше, чем велосипедист за 5 ч.

Решение. Пусть скорость мотоциклиста равна x км/ч, а велосипедиста — y км/ч. До встречи мотоциклист двигался 3 ч и проехал $3x$ км, а велосипедист соответственно — 1 ч и y км. Всего они проехали 264 км. Тогда $3x + y = 264$.

Велосипедист за 5 ч проезжает $5y$ км, а мотоциклист за 2 ч — $2x$ км, что на 40 км больше, чем $5y$ км. Тогда $2x - 5y = 40$.

Получили систему уравнений:

$$\begin{cases} 3x + y = 264, \\ 2x - 5y = 40, \end{cases}$$

решением которой является пара чисел $x = 80$, $y = 24$.

Следовательно, скорость мотоциклиста равна 80 км/ч, а велосипедиста — 24 км/ч.

Ответ: 80 км/ч, 24 км/ч. ■

Пример 3. Стол и стул стоили вместе 4100 р. После того как стол подешевел на 20 %, а стул подорожал на 10 %, они стали стоить вместе 3670 р. Найдите первоначальную цену стола и первоначальную цену стула.

Решение. Пусть первоначальная цена стола составляла x р., а стула — y р. Тогда по условию $x + y = 4100$.

Новая цена стола составляет 80 % первоначальной и равна $0{,}8x$ р. Новая цена стула составляет 110 % первоначальной и равна $1{,}1y$ р. Тогда $0{,}8x + 1{,}1y = 3670$.

Получили систему уравнений:

$$\begin{cases} x + y = 4100, \\ 0{,}8x + 1{,}1y = 3670. \end{cases}$$

Решением этой системы является пара $x = 2800$, $y = 1300$.

Следовательно, первоначальная цена стола была 2800 р., а стула — 1300 р.

Ответ: 2800 р., 1300 р. ■

Пример 4. Сколько граммов 3%-го и сколько граммов 8%-го растворов соли надо взять, чтобы получить 500 г 4%-го раствора?

Решение. Пусть первого раствора надо взять x г, а второго — y г. Тогда по условию $x + y = 500$.

В 3%-м растворе содержится $0{,}03x$ г соли, а в 8%-м — $0{,}08\,y$ г соли. В 500 г 4%-го раствора содержится $500 \cdot 0{,}04 = 20$ (г) соли. Следовательно, $0{,}03x + 0{,}08y = 20$.

Составим систему уравнений:

$$\begin{cases} x + y = 500, \\ 0{,}03x + 0{,}08y = 20, \end{cases}$$

решив которую получим $\begin{cases} x = 400, \\ y = 100. \end{cases}$

Значит, надо взять 400 г 3%-го раствора и 100 г 8%-го раствора.

Ответ: 400 г, 100 г. ■

Пример 5. У Петра были монеты по 2 р. и по 10 р. Он говорит, что купил книгу за 240 р., отдав за неё 30 монет, а Василий говорит, что такого быть не может. Кто прав?

Решение. Пусть у Петра было x монет по 2 р. и y монет по 10 р. Тогда

$$\begin{cases} x + y = 30, \\ 2x + 10y = 240. \end{cases}$$

Решением этой системы является пара (7,5; 22,5), что не соответствует смыслу задачи, так как количество монет может быть только натуральным числом.

Ответ: прав Василий. ■

Упражнения

32.1. Найдите два числа, если их сумма равна 63, а разность — 19.

32.2. Найдите два числа, если их разность равна 23, а сумма удвоенного большего из этих чисел и второго числа равна 22.

32.3. (*Задача из рассказа «Репетитор» А.П. Чехова.*) Купец купил 138 аршин[1] чёрного и синего сукна за 540 р. Спрашивается, сколько аршин он купил того и другого, если синее стоило 5 р. за аршин, а чёрное — 3 р.?

32.4. Группа из 46 туристов отправилась в поход на 10 лодках, часть из которых были четырёхместными, а остальные — шестиместными. Сколько было лодок каждого вида?

32.5. Чтобы накормить 4 лошадей и 12 коров, надо 120 кг сена в день, а чтобы накормить 3 лошадей и 20 коров — 167 кг сена. Найдите дневную норму сена для лошади и для коровы.

32.6. В первый день 2 гусеничных трактора и 1 колёсный вспахали 22 га, а во второй день 3 гусеничных и 8 колёсных — 72 га. Найдите, сколько гектаров земли обрабатывал ежедневно 1 гусеничный трактор и сколько — 1 колёсный.

32.7. Двое рабочих изготовили 135 деталей. Первый рабочий работал 7 дней, а второй — 12 дней. Сколько деталей изготавливал ежедневно каждый рабочий, если первый за 3 дня сделал на 3 детали больше, чем второй за 4 дня?

32.8. Две бригады работали на сборе яблок. В первый день одна бригада работала 5 ч, а другая — 4 ч, причём вместе они собрали 40 ц яблок. На следующий день бригады работали с той же производительностью труда, причём первая бригада собрала за 3 ч на 2 ц больше, чем вторая за 2 ч. Сколько центнеров яблок собирала каждая бригада за 1 ч?

32.9. За 6 кг конфет и 5 кг печенья заплатили 1440 р. Сколько стоит 1 кг конфет и сколько — 1 кг печенья, если 3 кг конфет дороже 1 кг печенья на 300 р.?

32.10. За 11 тетрадей и 8 ручек заплатили 309 р. Сколько стоит 1 тетрадь и сколько — 1 ручка, если 5 тетрадей дороже, чем 4 ручки, на 3 р.?

32.11. Из Брянска и Смоленска, расстояние между которыми 256 км, выехали одновременно навстречу друг другу автобус и автомобиль и встретились через 2 ч после начала движения. Найдите скорость каждого из них, если автобус за 2 ч проезжает на 46 км больше, чем автомобиль за 1 ч.

32.12. С двух станций, расстояние между которыми 300 км, одновременно навстречу друг другу отправились пассажирский и товарный поезда, которые встретились через 3 ч после начала движения. Если

---

[1] Аршин — старинная мера длины, равная 71,12 см.

бы пассажирский поезд вышел на 1 ч раньше, чем товарный, то они встретились бы через 2,4 ч после выхода товарного поезда. Найдите скорость каждого поезда.

32.13. Из села вышел пешеход и отправился на станцию. Через 30 мин из этого села выехал велосипедист и догнал пешехода через 10 мин после выезда. Найдите скорость каждого из них, если за 3 ч пешеход проходит на 4 км больше, чем велосипедист проезжает за полчаса.

32.14. Из Курска в Москву, расстояние между которыми 536 км, выехал автомобиль. Через 2,5 ч после начала движения первого автомобиля навстречу ему из Москвы выехал второй автомобиль, который встретился с первым через 2 ч после своего отправления. Найдите скорость каждого автомобиля, если первый за 2 ч проезжает на 69 км меньше, чем второй за 3 ч.

32.15. В двух бидонах было молоко. Если из первого бидона перелить во второй 10 л молока, то в обоих бидонах молока станет поровну. Если из второго бидона перелить в первый 20 л молока, то в первом станет в 2,5 раза больше молока, чем во втором. Сколько литров молока было в каждом бидоне?

32.16. Когда в первый вагон электропоезда вошли 4 пассажира, а из второго вагона вышли 4 пассажира, то в обоих вагонах пассажиров стало поровну. Если бы в первый вагон вошли 2 пассажира, а во второй — 24 пассажира, то в первом вагоне стало бы в 2 раза меньше пассажиров, чем во втором. Сколько пассажиров было сначала в каждом вагоне?

32.17. Моторная лодка за 3 ч движения против течения реки и 2,5 ч по течению проходит 98 км. Найдите собственную скорость лодки и скорость течения, если за 5 ч движения по течению она проходит на 36 км больше, чем за 4 ч против течения реки.

32.18. Катер за 5 ч движения по течению реки проходит на 70 км больше, чем за 3 ч движения против течения. Найдите скорость катера в стоячей воде и скорость течения, если за 9 ч движения по озеру он проходит столько, сколько за 10 ч движения против течения реки.

32.19. (*Задача из греческого фольклора.*) Осёл и мул идут рядом с грузом на спине. Осёл жалуется на непосильную ношу, а мул отвечает: «Чего ты жалуешься? Ведь если я возьму один твой мешок, то моя ноша станет в два раза тяжелее твоей. А если ты возьмёшь один мой мешок, то твоя поклажа сравнится с моей». Скажите же, мудрые математики, сколько мешков нёс осёл и сколько нёс мул?

32.20. (*Задача из индийского фольклора.*) Один говорит другому: «Дай мне 100 рупий, и я буду вдвое богаче тебя». Другой отвечает: «А если ты дашь мне 10 рупий, то я стану в 6 раз богаче тебя». Сколько денег было у каждого?

32.21. Сын 6 лет тому назад был в 4 раза младше отца, а через 12 лет он будет младше отца в 2 раза. Сколько лет отцу и сколько сыну?

32.22. Бабушка 6 лет тому назад была в 9 раз старше внучки, а 4 года тому назад — в 7 раз старше. Сколько лет бабушке и сколько внучке?

32.23. Две мастерские должны были сшить 75 костюмов. Когда первая мастерская выполнила 60 % заказа, а вторая — 50 %, то оказалось, что первая мастерская сшила на 12 костюмов больше, чем вторая. Сколько костюмов должна была сшить каждая мастерская?

32.24. У Миши и Гали было вместе 1500 р. Когда Миша истратил $\frac{1}{3}$ своих денег на приобретение математического справочника, а Галя — $\frac{1}{6}$ своих денег на приобретение справочника по русскому языку, то оказалось, что Миша истратил на 50 р. больше, чем Галя. Сколько денег было у каждого из них сначала?

32.25. Известно, что 4 кг огурцов и 3 кг помидоров стоили 240 р. После того как огурцы подорожали на 50 %, а помидоры подешевели на 20 %, за 2 кг огурцов и 5 кг помидоров заплатили 250 р. Найдите первоначальную цену 1 кг огурцов и 1 кг помидоров.

32.26. Известно, что 2 банки краски и 3 банки олифы стоили 320 р. После того как краска подешевела на 30 %, а олифа подорожала на 20 %, за 6 банок краски и 5 банок олифы заплатили 660 р. Найдите первоначальную цену одной банки краски и одной банки олифы.

32.27. Вкладчик положил в банк 21 000 р. на два разных счёта. По первому из них банк выплачивает 4 % годовых, а по второму — 6 % годовых. Через год вкладчик получил по процентам 1020 р. Сколько рублей он положил на каждый счёт?

32.28. Вкладчик положил в банк 30 000 р. на два разных счёта. По первому из них банк выплачивает 5 % годовых, а по второму — 7 % годовых. Через год вкладчик получил по первому вкладу на 60 р. процентных денег больше, чем по второму вкладу. Сколько рублей он положил на каждый счёт?

32.29. Известно, что 60 % числа a на 2 больше, чем 70 % числа b, а 50 % числа b на 10 больше, чем $\frac{1}{3}$ числа a. Найдите числа a и b.

32.30. Известно, что 25 % одного числа равно 20 % другого числа, а $\frac{1}{6}$ первого числа на 4 меньше 40 % другого. Найдите данные числа.

32.31. Имеется два сплава меди и цинка. Один сплав содержит 9 %, а другой — 30 % цинка. Сколько килограммов каждого сплава надо взять, чтобы получить сплав массой 300 кг, содержащий 23 % цинка?

32.32. Имеется два водно-солевых раствора. Первый раствор содержит 25 %, а второй — 40 % соли. Сколько килограммов каждого раствора надо взять, чтобы получить 50 кг раствора, содержащего 34 % соли?

32.33. Сумма цифр двузначного числа равна 15. Если поменять его цифры местами, то получим число, которое меньше данного на 9. Найдите данное число.

32.34. Периметр прямоугольника равен 28 см. Если две противоположные стороны увеличить на 6 см, а две другие уменьшить на 2 см, то его площадь увеличится на 24 см^2. Найдите стороны данного прямоугольника.

32.35. Если каждую сторону прямоугольника увеличить на 3 см, то его площадь увеличится на 45 см^2. Если две противоположные стороны увеличить на 4 см, а две другие уменьшить на 5 см, то его площадь уменьшится на 17 см^2. Найдите стороны данного прямоугольника.

32.36. Из двух сёл, расстояние между которыми равно 45 км, одновременно навстречу друг другу отправились велосипедист и пешеход и встретились через 3 ч после начала движения. Если бы велосипедист выехал на 1 ч 15 мин раньше, чем вышел пешеход, то они бы встретились через 2 ч после отправления пешехода. С какой скоростью двигался каждый из них?

32.37. Из пунктов A и B, расстояние между которыми равно 24 км, одновременно навстречу друг другу вышли два туриста. Через 2 ч после начала движения они ещё не встретились, а расстояние между ними составляло 6 км. Ещё через 2 ч одному из них оставалось пройти до пункта B на 4 км меньше, чем другому до пункта A. Найдите скорость каждого туриста.

32.38. Велосипедист проехал из пункта A в пункт B за запланированное время, двигаясь с некоторой скоростью. Если бы он увеличил скорость на 3 км/ч, то прибыл бы в пункт B на 1 ч раньше, а если бы он проезжал за 1 ч на 2 км меньше, то прибыл бы на 1 ч позже. Найдите скорость велосипедиста.

32.39. Груз перевезли на некотором количестве машин с одинаковой грузоподъёмностью. Если бы на каждой машине груза было на 1 т больше, то машин понадобилось бы на 3 меньше, а если бы на 2 т больше, то машин понадобилось бы на 5 меньше. Найдите массу перевезённого груза.

32.40. Расстояние между двумя станциями пассажирский поезд проходит на 3 ч быстрее, чем товарный, а поезд-экспресс — на 1 ч быстрее, чем пассажирский. Скорость товарного поезда на 25 км/ч меньше скорости пассажирского, а скорость экспресса на 15 км/ч больше скорости пассажирского. Найдите скорость каждого поезда и расстояние между станциями.

32.41. Автобус и маршрутное такси выезжают ежедневно навстречу друг другу по расписанию в 8 ч из городов Вишнёвое и Яблоневое, расстояние между которыми 18 км, и встречаются в 8 ч 10 мин. Однажды автобус выехал по расписанию, а такси — с опозданием, в 8 ч 9 мин. Поэтому в тот день они встретились в 8 ч 15 мин. Найдите скорости автобуса и маршрутного такси.

32.42. Из города Солнечный в село Весёлое в 9 ч 5 мин и в 9 ч 45 мин выехали с одинаковой скоростью два автобуса. Из Весёлого в Солнечный в 9 ч 30 мин выехал велосипедист, который встретился с первым автобусом в 9 ч 45 мин, а со вторым — в 10 ч 15 мин. Найдите скорости автобусов и велосипедиста, если расстояние между Солнечным и Весёлым равно 36 км.

32.43. Масса смеси, состоящей из двух веществ, составляла 800 г. После того как из неё выделили $\frac{5}{8}$ первого вещества и 60 % второго, в смеси осталось первого вещества на 72 г меньше, чем второго. Сколько граммов каждого вещества было в смеси сначала?

32.44. В куске сплава меди и цинка последнего было на 48 кг меньше, чем меди. После того как из сплава выделили $\frac{8}{9}$ содержавшейся в нём меди и 80 % цинка, масса сплава стала равной 10 кг. Сколько килограммов каждого вещества было в сплаве первоначально?

32.45. Сумма цифр двузначного числа равна 9, причём цифра в разряде десятков больше цифры в разряде единиц. При делении данного числа на разность его цифр получили неполное частное 14 и остаток 2. Найдите данное число.

32.46. Разность цифр двузначного числа равна 6, причём цифра в разряде десятков меньше цифры в разряде единиц. Если же разделить данное число на сумму его цифр, то получим неполное частное 3 и остаток 3. Найдите данное число.

32.47. В одном баке было 12 л воды, а в другом — 32 л. Если первый бак долить доверху водой из второго бака, то второй бак останется наполненным на половину своего объёма. Если второй бак долить доверху водой из первого, то первый бак останется наполненным на шестую часть своего объёма. Найдите объём каждого бака.

32.48. В двух бочках ёмкостью 40 л и 60 л было некоторое количество воды. Если в меньшую бочку долить доверху воды из большей, то в большей останется $\frac{5}{7}$ количества воды, которое было в ней сначала. Если в бо́льшую бочку долить доверху воды из меньшей, то в меньшей останется $\frac{5}{14}$ количества воды, которое было в ней сначала. Сколько литров воды было в каждой бочке сначала?

32.49. Существует ли двузначное число, удовлетворяющее таким условиям (в случае утвердительного ответа укажите это число): цифра в разряде десятков этого числа на 2 больше цифры в разряде его единиц, а разность между этим числом и числом, записанным теми же цифрами, но в обратном порядке, равна: 1) 20; 2) 18?

32.50. (*Задача Л.Н. Толстого.*) Вышла в поле артель косарей. Она должна выкосить два луга, из которых один в 2 раза больше другого. Полдня вся артель косила больший луг, а на вторую половину дня артель разделилась пополам, и одна половина осталась докашивать больший луг, а вторая начала косить меньший. До вечера большой луг был скошен, а от меньшего остался участок, который скосил на следующий день один косарь, работавший целый день. Сколько косарей было в артели?

Упражнения для повторения

32.51. В равенстве $4(0{,}5x - 3) = 3x + *$ замените звёздочку таким выражением, чтобы образовалось уравнение:

1) не имеющее корней;
2) имеющее бесконечно много корней;
3) имеющее один корень.

32.52. Постройте график функции:

1) $y = (2x - 1)(4x^2 + 2x + 1) - 8x^3$;
2) $y = (x + 1)(x + 4) - (x + 3)^2$;
3) $y = (0{,}5x + 2)^2 - (0{,}5x - 1)(0{,}5x + 1)$.

32.53. Представьте выражение $12ab$ в виде разности квадратов двух многочленов. Сколько решений имеет задача?

32.54. Докажите, что при любом целом значении a значение выражения $(a - 3)(a^2 - a + 2) - a(a - 2)^2 + 2a$ делится нацело на 3.

32.55. Докажите тождество $(a - bc)^2 - 2(b^2c^2 - a^2) + (bc + a)^2 = 4a^2$.

32.56. Известно, что $x + y = a$, $xy = b$, $x^2 + y^2 = c$. Найдите зависимость между a, b и c.

32.57. Точки A (2; 3) и B (5; a) принадлежат прямой $y = kx$. Найдите значение a.

32.58. Найдите такие значения x, при которых выражение $(a - 1)^2 + 4(a - 1) - x$ можно было бы разложить на множители по формуле квадрата суммы.

32.59. Графики функций $y = ax + 12$ и $y = (3 - a)x + a$ пересекаются в точке с абсциссой 2. Найдите ординату точки их пересечения.

Итоги главы 4

Решение уравнения с двумя переменными

Пару значений переменных, обращающую уравнение в верное равенство, называют решением уравнения с двумя переменными.

Решить уравнение с двумя переменными

Решить уравнение с двумя переменными — это значит найти все его решения или показать, что оно не имеет решений.

Свойства уравнений с двумя переменными

- Если к обеим частям данного уравнения прибавить (или из обеих частей вычесть) одно и то же число, то получим уравнение, имеющее то же множество решений, что и данное.
- Если какое-либо слагаемое перенести из одной части уравнения в другую, изменив при этом его знак на противоположный, то получим уравнение, имеющее то же множество решений, что и данное.
- Если обе части уравнения умножить (разделить) на одно и то же отличное от нуля число, то получим уравнение, имеющее то же множество решений, что и данное.

График уравнения с двумя переменными

Графиком уравнения с двумя переменными называют геометрическую фигуру, состоящую из всех тех и только тех точек координатной плоскости, координаты которых (пары чисел) являются решениями данного уравнения.

Линейное уравнение с двумя переменными

Линейным уравнением с двумя переменными называют уравнение вида $ax + by = c$, где x и y — переменные, a, b, c — некоторые числа.

Решение системы уравнений с двумя переменными

- Решением системы уравнений с двумя переменными называют пару значений переменных, обращающую каждое уравнение в верное равенство.
- Решить систему уравнений — это значит найти все её решения или доказать, что решений нет.

Решение системы двух линейных уравнений с двумя переменными графическим методом

Чтобы решить систему линейных уравнений графическим методом, нужно:

1) построить на одной координатной плоскости графики уравнений, входящих в систему;
2) найти координаты всех точек пересечения построенных графиков;
3) полученные пары чисел и будут искомыми решениями.

Количество решений системы линейных уравнений

Если графиками уравнений, входящих в систему линейных уравнений, являются прямые, то количество решений этой системы зависит от взаимного расположения двух прямых на плоскости:

1) если прямые пересекаются, то система имеет единственное решение;
2) если прямые совпадают, то система имеет бесконечно много решений;
3) если прямые параллельны, то система решений не имеет.

Решение системы линейных уравнений методом подстановки

Чтобы решить систему линейных уравнений методом подстановки, нужно:

1) выразить из любого уравнения системы одну переменную через другую;
2) подставить в другое уравнение системы вместо этой переменной выражение, полученное на первом шаге;
3) решить уравнение с одной переменной, полученное на втором шаге;
4) подставить найденное значение переменной в выражение, полученное на первом шаге;
5) вычислить значение другой переменной;
6) записать ответ.

Решение системы линейных уравнений методом сложения

Чтобы решить систему линейных уравнений методом сложения, нужно:

1) подобрав «выгодные» множители, преобразовать одно или оба уравнения системы так, чтобы коэффициенты при одной из переменных стали противоположными числами;

2) сложить почленно левые и правые части уравнений, полученных на первом шаге;
3) решить уравнение с одной переменной, полученное на втором шаге;
4) подставить найденное на третьем шаге значение переменной в любое из уравнений исходной системы;
5) вычислить значение другой переменной;
6) записать ответ.

глава

5 Элементы комбинаторики и описательной статистики

В этой главе вы познакомитесь с двумя ключевыми правилами, помогающими решать комбинаторные задачи, с начальными сведениями о статистике, узнаете о способах сбора, представления и анализа данных.

§ 33 Основные правила комбинаторики

Сколькими способами ученики вашего класса могут стать друг за другом в очереди в буфет? Сколькими способами можно выбрать в вашем классе старосту и его заместителя? Сколькими способами могут распределиться золотые, серебряные и бронзовые медали на чемпионате мира по футболу?

Отвечая на эти вопросы, надо подсчитать, сколько различных комбинаций, образованных по определённому правилу, можно составить из элементов данного конечного множества. Область математики, которая занимается решением подобных задач, называют **комбинаторикой**.

В основе решения большинства комбинаторных задач лежат два правила: **правило суммы** и **правило произведения**.

Рассмотрим такой пример. Туриста заинтересовали 5 маршрутов по Карелии и 7 маршрутов по Кавказу. Выясним, сколькими способами он может выбрать маршрут, имея время только на один.

Поскольку всего имеется $5 + 7 = 12$ различных маршрутов, то один из них можно выбрать 12 способами.

Обобщением этого примера является следующее правило.

Правило суммы

Если множество A состоит из m элементов, а множество B — из k элементов, причём эти множества не имеют общих элементов, то выбор «a или b», где $a \in A$, $b \in B$, можно осуществить $m + k$ способами.

Правило суммы можно обобщить для трёх и более множеств. Например, *если множества A, B и C состоят соответственно из m, k и n элементов, причём ни у каких двух из этих множеств нет общих элементов, то выбор «a, или b, или c», где $a \in A$, $b \in B$, $c \in C$, можно осуществить $m + k + n$ способами.*

Обратимся снова к примеру с выбором маршрута. Если у туриста есть время на два маршрута и он хочет побывать сначала в Карелии, а затем на Кавказе, то он может организовать свой отдых 35 способами. Действительно, если выбрать один маршрут по Карелии, то парой к нему может быть любой из семи маршрутов по Кавказу. Так как маршрутов по Карелии пять, то количество пар (маршрут по Карелии; маршрут по Кавказу) равно $7 + 7 + 7 + 7 + 7 = 7 \cdot 5 = 35$.

Эти рассуждения иллюстрирует следующая таблица.

		Маршруты по Кавказу						
		1	2	3	4	5	6	7
Маршруты по Карелии	1	(1; 1)	(1; 2)	(1; 3)	(1; 4)	(1; 5)	(1; 6)	(1; 7)
	2	(2; 1)	(2; 2)	(2; 3)	(2; 4)	(2; 5)	(2; 6)	(2; 7)
	3	(3; 1)	(3; 2)	(3; 3)	(3; 4)	(3; 5)	(3; 6)	(3; 7)
	4	(4; 1)	(4; 2)	(4; 3)	(4; 4)	(4; 5)	(4; 6)	(4; 7)
	5	(5; 1)	(5; 2)	(5; 3)	(5; 4)	(5; 5)	(5; 6)	(5; 7)

Обобщением этого примера является следующее правило.

Правило произведения

Если элемент a можно выбрать m способами и после каждого такого выбора элемент b можно выбрать k способами[1], то выбор «a и b» в указанном порядке можно осуществить mk способами.

Правило произведения также можно обобщить.

Если элемент a можно выбрать m способами, после каждого такого выбора элемент b можно выбрать k способами, и после того, как выбраны элементы a и b, элемент c можно выбрать n способами, то выбор «a и b и c» можно осуществить mkn способами.

Пример 1. Из класса, в котором учится 28 человек, надо выбрать трёх дежурных — по одному на каждый из трёх этажей школы. Каким количеством способов это можно сделать?

[1] Будем называть это свойство принципом независимости количества выборов.

Решение. Существует 28 способов выбрать дежурного по первому этажу. После того как этот выбор будет сделан, останется 27 учеников, каждый из которых может стать дежурным по второму этажу. После выбора дежурных для первого и второго этажей дежурного по третьему этажу можно выбрать 26 способами.

Таким образом, по правилу произведения количество способов выбора трёх дежурных равно $28 \cdot 27 \cdot 26 = 19\,656$.

Ответ: 19 656 способов. ■

Пример 2. На рисунке 33.1 показана схема дорог, ведущих из города A в город B. Сколькими способами можно проехать из города A в город B?

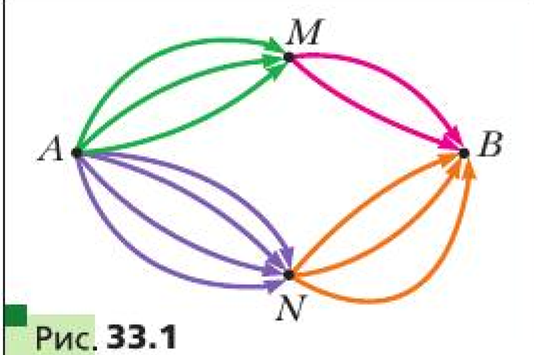


Рис. **33.1**

Решение. Воспользовавшись правилом произведения, устанавливаем, что из города A в город B через город M можно попасть $3 \cdot 2 = 6$ способами, а через город N — $4 \cdot 3 = 12$ способами. Тогда по правилу суммы общее количество способов равно $6 + 12 = 18$ способов.

Ответ: 18 способов. ■

1. Сформулируйте правило суммы.
2. Сформулируйте правило произведения.

Упражнения

33.1. Города A и B связаны четырьмя дорогами. Автомобиль должен проехать из города A в город B и вернуться обратно в город A. Сколькими способами можно осуществить выбор маршрута?

33.2. На плоскости отметили пять точек красным карандашом и три точки — синим. Сколько можно провести отрезков, концы которых совпадают с отмеченными точками и имеют разный цвет?

33.3. Сколько различных трёхзначных чисел можно составить из цифр:
1) 1 и 2;   2) 0 и 1
(цифры могут повторяться)?

33.4. Из города A в город B ведут 4 дороги, а из города B в город C ведут 3 дороги (рис. 33.2). Сколькими способами можно проехать из города A в город C?

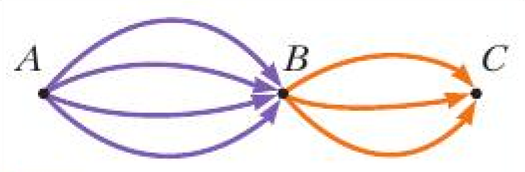


Рис. **33.2**

33.5. Кафе предлагает в меню 3 первых блюда, 6 вторых блюд и 5 третьих блюд. Сколько существует способов выбрать обед из трёх блюд (по одному блюду каждого вида)?

33.6. Рассмотрим слоги из двух букв, первая из которых является согласной, а вторая — гласной. Сколько таких различных слогов можно составить из букв слова:
1) Москва; 2) Красноярск?

◆ ◆

33.7. Сколько четырёхзначных чисел, все цифры которых различны, можно составить из цифр 1, 2, 3, 4, если эти числа должны начинаться: 1) с цифры 4; 2) с записи «23»?

33.8. Сколько трёхзначных чисел можно записать с помощью цифр 0, 1, 2, 3, 4?

33.9. Сколько существует двузначных чисел, все цифры которых чётные?

33.10. Сколько существует двузначных чисел, все цифры которых нечётные?

33.11. Монету подбрасывают 3 раза. Сколько различных последовательностей орлов и решек можно получить?

33.12. Игральный кубик бросают 3 раза. Сколько различных последовательностей очков можно получить?

33.13. Каждую клетку квадрата 2×2 можно раскрасить в синий или красный цвет. Сколько существует способов раскраски этого квадрата?

33.14. Сколькими способами можно выбрать на шахматной доске белую и чёрную клетки, не лежащие на одной и той же вертикали и горизонтали?

◆ ◆ ◆

33.15. Сколько существует пятизначных чисел, произведение двух последних цифр которых равно 8?

33.16. Сколько существует пятизначных чисел, произведение двух последних цифр которых равно 21?

33.17. У одного коллекционера есть для обмена 11 марок и 8 монет, у другого для обмена — 9 марок и 7 монет. Сколькими способами коллекционеры могут совершить обмен марка на марку или монета на монету?

33.18. Сколько существует пятизначных чисел, все цифры которых имеют одинаковую чётность?

Упражнения для повторения

33.19. Решите уравнение $|x - 2| + |x^2 - 4| = 0$.

33.20. Какова вероятность того, что при одном броске игрального кубика выпадет не более 4 очков?

33.21. Некоторый товар дважды подорожал на 10 %. На сколько процентов увеличилась его цена по сравнению с первоначальной?

33.22. Разложите на множители выражение:

1) $4kn + 6ak + 6an + 9a^2$;
2) $b^6 - 4b^4 + 12b^2 - 9$;
3) $y^4(x^2 + 8x + 16) - a^8$;
4) $9x^2 - 6x - 35$.

33.23. Числа x и y таковы, что $x - 2y = 2$, $xy = 4$. Чему равно значение выражения $x + 2y$?

§ 34 Начальные сведения о статистике

Каким тиражом следует выпустить учебник по алгебре для 7 класса?

Стоит ли определённому политику выдвигать свою кандидатуру на очередных выборах мэра?

Сколько килограммов рыбы и морепродуктов потребляет в среднем за год один житель России?

Выгодно ли для концерта данного артиста арендовать стадион?

На эти и многие другие вопросы помогает отвечать статистика.

Определение

Статистика (от латинского слова *status* — «состояние») — это наука о сборе, обработке и анализе количественных данных, которые характеризуют массовые явления.

Статистическое исследование состоит из нескольких этапов.

Сбор данных

↓

Обработка данных и их представление в удобной форме

↓

Анализ данных

↓

Выводы и рекомендации

Остановимся отдельно на каждом этапе.

Сбор данных

Вы знаете, что вредные привычки, неправильное питание, малоподвижный образ жизни приводят к сердечно-сосудистым заболеваниям. К такому выводу врачи пришли, исследовав, конечно, не всех людей планеты.

Понятно, что исследование носило *выборочный*, но *массовый* характер.

В статистике совокупность объектов, на основании которых проводят исследование, называют **выборкой**.

В данном примере выборка состояла из нескольких миллионов человек.

Следует отметить, что статистический вывод, основанный лишь на численности выборки, не всегда достоверен. Например, если мы, исследуя популярность артиста, ограничимся опросом людей, пришедших на его концерт, то полученные выводы не будут объективными, ведь эти люди пришли на концерт именно потому, что этот артист им нравится. Статистики говорят, что выборка должна быть **репрезентативной** (от французского слова *représentatif* — «показательный»).

Одним из условий формирования репрезентативной выборки является случайный выбор её элементов. При этом должна быть обеспечена одинаковая вероятность попадания в выборку любого объекта из множества исследуемых. Так, врачи, изучая факторы риска возникновения сердечно-сосудистых заболеваний, исследовали людей разного возраста, профессий, национальностей и т. д., подбирая элементы выборки случайным образом.

Следовательно, *сбор данных должен основываться на массовости и репрезентативности выборки*. Иногда выборка может совпадать с множеством всех объектов, исследование которых проводится. Тогда её называют **генеральной совокупностью**. Примером такого исследования является проведение единого государственного экзамена по математике для выпускников 11 классов.

Способы представления данных

Собранную информацию (совокупность данных) удобно представлять в виде таблиц, графиков, диаграмм.

Рассмотрим несколько примеров.

Пример 1. В таблице представлены результаты выступлений российских школьников на международных математических олимпиадах в течение 1995–2012 гг.

Год	Место проведения	Количество медалей		
		Золотые	Серебряные	Бронзовые
1995	Канада	4	2	0
1996	Индия	2	3	1
1997	Аргентина	3	2	1
1998	Тайвань	2	3	1
1999	Румыния	4	2	0
2000	Южная Корея	5	1	0
2001	США	5	1	0
2002	Великобритания	6	0	0
2003	Япония	3	2	1
2004	Греция	4	1	1
2005	Мексика	4	2	0
2006	Словения	3	3	0
2007	Вьетнам	5	1	0
2008	Испания	6	0	0
2009	Германия	5	1	0
2010	Казахстан	4	2	0
2011	Нидерланды	2	4	0
2012	Аргентина	4	2	0

Примечание. Команда участников на международных математических олимпиадах состоит не более чем из 6 человек. ■

Во многих случаях данные удобно представлять в виде **столбчатой диаграммы**, которую ещё называют **гистограммой** (от греческих слов *histos* — «столб» и *gramma* — «написание»). Такая информация легко воспринимается и хорошо запоминается.

Информацию также можно представлять в виде графиков.

Пример 2. На рисунке 34.1 изображён график ежегодного процентного роста количества пользователей Интернета в России в течение 2002–2011 гг. ■

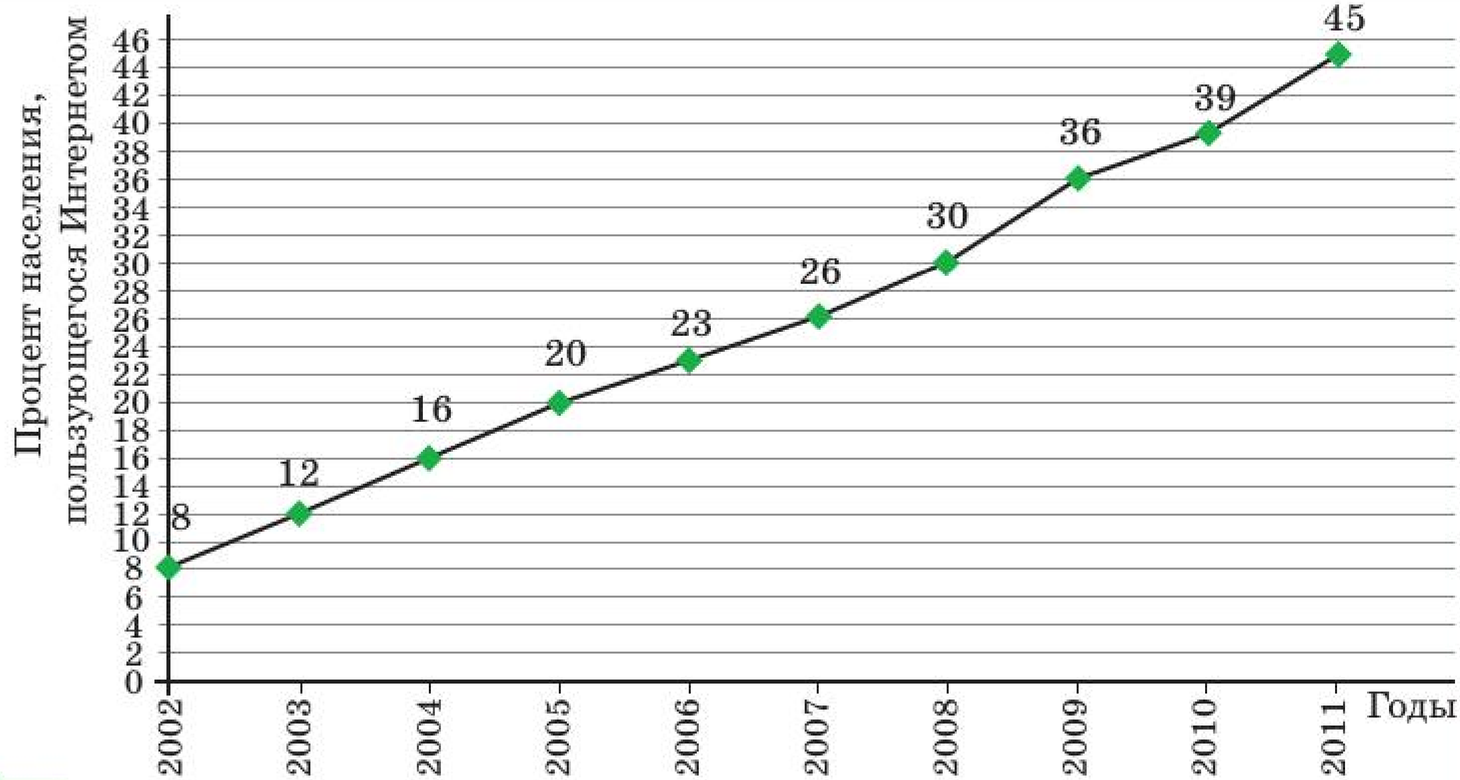


Рис. **34.1**

Столбчатые диаграммы и графики обычно используют тогда, когда хотят продемонстрировать, как с течением времени изменяется некоторая величина.

Пример 3. На рисунке 34.2 приведено распределение золотых медалей, завоёванных российскими школьниками на международных олим-

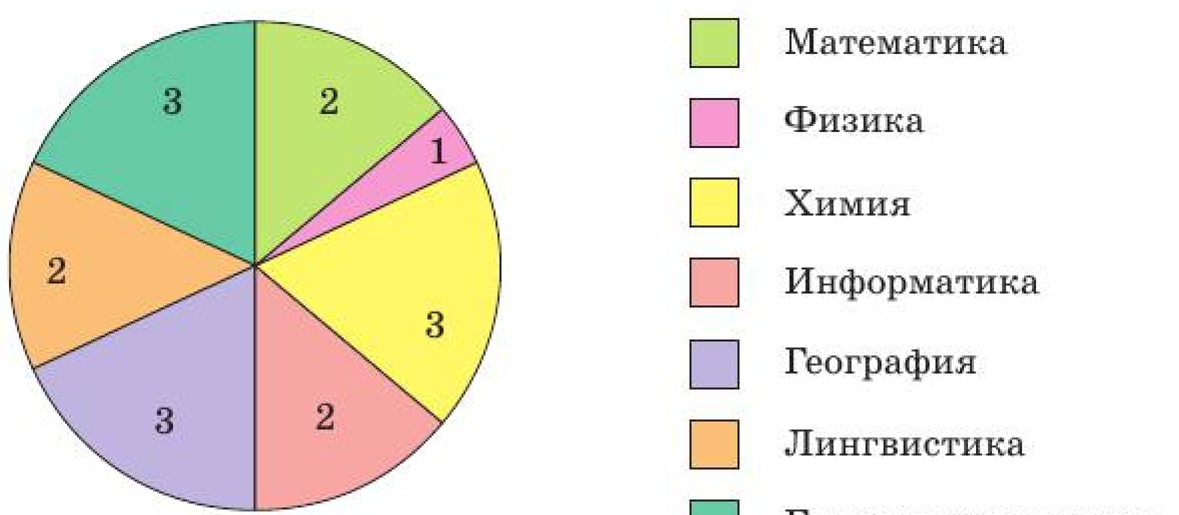


Рис. **34.2**

пиадах по математике, физике, химии, информатике, географии, лингвистике, естественным наукам в 2011 г. Для этого использована **круговая диаграмма**: круг представляет общее количество медалей, а каждому предмету соответствует некоторый сектор круга. ■

Пример 4. На рисунке 34.3 представлена информация о количестве профессиональных театров в России (период с 2003 по 2008 г.). ■

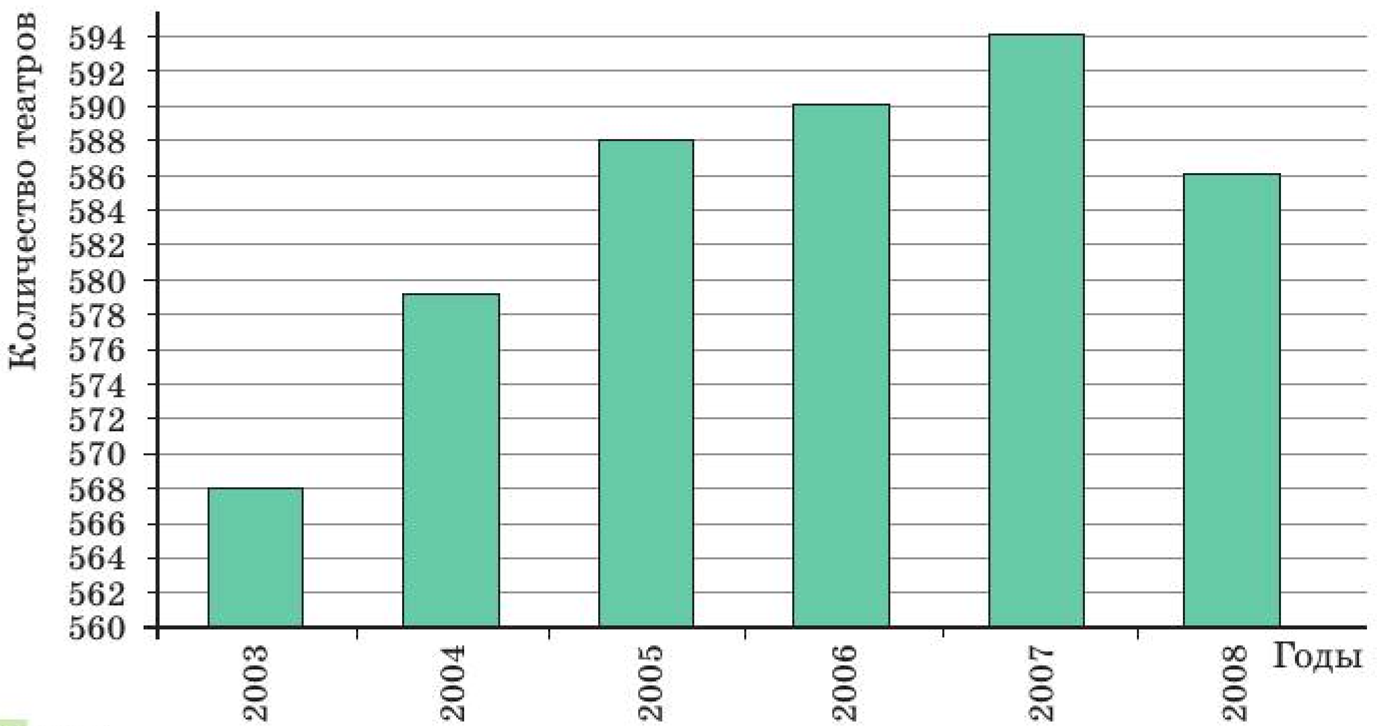


Рис. 34.3

Анализ данных, выводы и рекомендации

Статистические сведения поступают из разных областей знаний и деятельности человека: экономики, медицины, социологии, демографии, сельского хозяйства, метеорологии, спорта и т. д. Однако статистические методы обработки (анализа) данных, несмотря на разнообразие областей применения, имеют много общего. Ознакомимся с некоторыми из них.

Обратимся к примеру 1. Приведённая таблица позволяет узнать, сколько в среднем золотых медалей в год завоёвывали школьники России на международных математических олимпиадах. Для этого надо количество всех золотых медалей, полученных на протяжении рассматриваемого периода, разделить на количество лет. Например, за период 2000–2012 гг. имеем:

$$\frac{5+5+6+3+4+4+3+5+6+5+4+2+4}{13}=\frac{56}{13}\approx 4{,}31.$$

Так как за год можно завоевать не более 6 медалей, то среднее значение 4,31 свидетельствует о том, что команда России выступает на этом престижном форуме с большим успехом.

В статистической информации средние значения полученной совокупности данных встречаются довольно часто. Например, приведём таблицу потребления мяса в России (в килограммах на человека в год).

Наименование продукта	Год			
	2007	2008	2009	2010
Говядина и телятина	17,3	18,6	16,8	16,6
Свинина	17,9	19,8	19,2	19,9
Мясо бройлеров	18,6	20,1	21,2	21,0

Такую таблицу могут использовать экономисты и диетологи в своих исследованиях, выводах и рекомендациях, крупные производители и поставщики сельхозпродукции при планировании своей деятельности.

Однако среднее значение не всегда точно (адекватно) отображает ситуацию. Например, если в стране доходы разных слоёв населения очень различаются, то средний доход на одного человека для большинства жителей может не отображать их материальное состояние.

Допустим, в какой-то стране 100 жителей — очень богатые, а остальные 5 млн — очень бедные. Тогда показатель среднего дохода может оказаться не низким, а следовательно, не будет адекватно отображать общую бедность населения.

В подобных случаях для анализа данных используют другие характеристики.

С помощью примера 1 составим таблицу, отображающую количество медалей каждого вида, завоёванных российскими школьниками на международных математических олимпиадах в течение 1995–2012 гг.

Золотые медали	Серебряные медали	Бронзовые медали
71	32	5

Такую таблицу называют **частотной**, а числа, записанные во второй строке, — **частотами**.

Частота 71 показывает, что российские школьники чаще всего завоёвывали золотые медали. Показатель «золотые медали» называют **модой** полученных данных.

Это слово всем хорошо знакомо. Мы часто говорим «войти в моду», «выйти из моды», «дань моде». В повседневной жизни мода означает совокупность взглядов и привычек, которым большинство отдаёт предпочтение в данный момент времени.

Именно мода является важнейшей характеристикой тогда, когда полученная совокупность данных не является числовым множеством. Продемонстрируем это на таком примере.

Одна фирма, планирующая поставлять джинсы в Россию, провела опрос репрезентативной выборки, состоящей из 500 человек. В результате получили такую частотную таблицу.

Размер джинсов	XS	S	M	L	XL	XXL	XXXL
Частота	61	104	111	108	64	43	9
Относительная частота, %	12,2	20,8	22,2	21,6	12,8	8,6	1,8

В третьей строке этой таблицы записано отношение соответствующей частоты к величине выборки. Это отношение, записанное в процентах, называют **относительной частотой**. Например, для размера XS имеем: $\frac{61}{500} \cdot 100 = 12{,}2$ (%).

Мода данной выборки — это размер M, и ей соответствует относительная частота 22,2 %.

Тем самым фирма получила информацию, что наибольшую часть объёмов поставок (около 22 %) должны составлять джинсы размера M.

Заметим, что если бы в таблице две частоты были равны и принимали наибольшие значения, то модой являлись бы два соответствующих размера.

Для выработки стратегии своей деятельности фирме важно знать не только моду выборки, но и «сконцентрированность» других данных вокруг моды. Так, в нашем примере частоты, соответствующие размерам S и L, не сильно (по сравнению с другими) отличаются от частоты размера M.

Если эта информация не будет учтена, то фирма может понести убытки от нераспроданных джинсов неходовых размеров или создать дефицит ходовых размеров.

Выше мы привели пример, когда среднее значение неточно отображает материальное состояние людей в стране. Более полную характеристику можно получить, если средние значения дополнить результатом такого исследования.

Формируют репрезентативную выборку, состоящую из жителей данной страны, и получают совокупность данных, составленную из доходов. Далее в соответствии со шкалой, определяющей уровень доходов (низкий, средний, высокий), разбивают полученный ряд данных на три группы. Составляют таблицу, в которую вносят значения частот и относительных частот.

Уровень доходов	Низкий	Средний	Высокий
Частота	m	n	k
Относительная частота, %	p	q	r

Мода такой совокупности данных может характеризовать уровень доходов в стране.

Исследование совокупности данных можно сравнить с работой врача, ставящего диагноз. В зависимости от жалоб пациента или видимых симптомов врач выбирает определённую методику поиска причины болезни. Понятно, что методы исследования определяют точность диагноза. Так и в статистике: в зависимости от собранной информации и способа её получения применяют различные методы её обработки. Эти методы могут дополнять друг друга, какой-то из них может более точно (адекватно), чем другие, отражать конкретную ситуацию. Так, анализируя выступления российских школьников на международных математических олимпиадах, можно установить, что статистические характеристики — среднее значение и мода — удачно сочетаются. А в примере, определяющем ходовой размер джинсов, наиболее приемлем поиск моды.

Чем богаче арсенал методик обработки данных, тем более объективный вывод можно получить.

Познакомимся ещё с одной важной статистической характеристикой.

Семья, приняв решение сделать ремонт на кухне, интересуется, сколько стоит положить один квадратный метр керамической плитки.

Изучив прейскуранты 11 строительных фирм, получили такую информацию (цены записаны в рублях в порядке возрастания):

270, 280, 300, 300, 310, 350, 540, 550, 860, 890, 1400.

Заметим, что полученный ряд данных имеет большой **размах**, т. е. большую разность между наибольшим и наименьшим значениями данной выборки. Он равен 1130 р.

Семья хочет выбрать фирму со средними ценами.

Среднее значение полученной совокупности данных равно 550 р.

Однако полученные данные показывают, что цену 550 р. скорее можно отнести к высоким, чем к средним.

Обратим внимание на число, которое стоит посередине записанной упорядоченной совокупности данных. Это число 350. Его называют **медианой** этой выборки. В этой ситуации именно медиана помогает выбрать фирму со средними ценами. Действительно, в последовательности из 11 чисел есть пять меньших, чем 350, и пять бóльших, чем 350.

Теперь рассмотрим упорядоченную совокупность данных, состоящую из чётного количества чисел, например из восьми:

1, 4, 4, 7, 8, 15, 24, 24.

Здесь «серединой» выборки являются сразу два числа: 7 и 8. Считают, что медиана такой выборки равна их среднему арифметическому $\frac{7+8}{2} = 7{,}5$.

Среднее значение, моду и медиану называют **мерами центральной тенденции** полученной совокупности данных.

? **1.** Какую науку называют статистикой?
2. Из каких этапов состоит статистическое исследование?
3. Что в статистике называют выборкой?
4. На чём должен основываться сбор данных?
5. Какие существуют способы представления данных?
6. Приведите примеры применения статистической информации в форме средних значений.
7. Приведите примеры, когда статистическая информация в форме средних значений неточно отображает ситуацию.
8. Опишите частотную таблицу.
9. Опишите, что такое мода.
10. Опишите, как найти относительную частоту.
11. Какое число называют медианой упорядоченной выборки?
12. Что называют мерами центральной тенденции совокупности данных?

Упражнения

34.1. Используя диаграмму, на которой отображено, сколько посещений музеев в год в России приходится на 1000 человек населения (рис. 34.4), определите:

1) в какой из рассматриваемых годов посещаемость музеев была наибольшей; наименьшей;

2) на сколько человек выросла посещаемость музеев в 2007 г. по сравнению с 2004 г.;

3) на сколько процентов возросла посещаемость музеев в 2008 г. по сравнению с 2003 г. (ответ округлите до десятых).

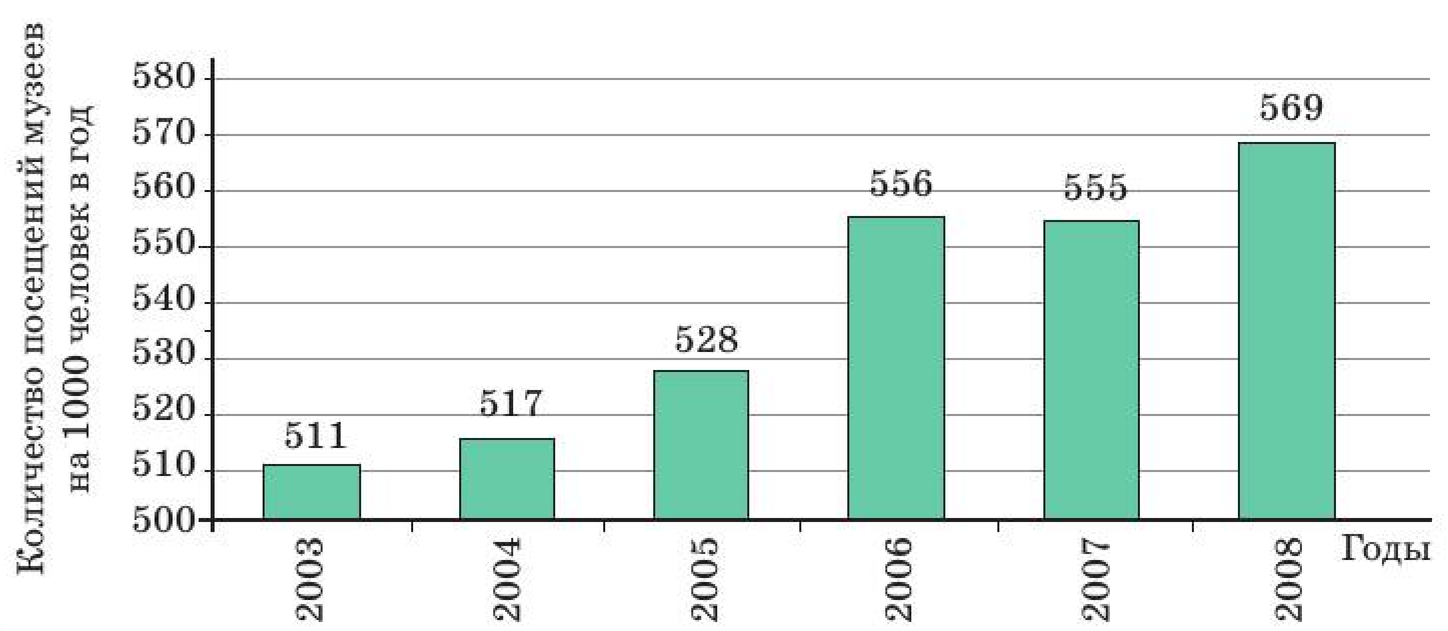


Рис. 34.4

34.2. Учащиеся 7 классов занимаются в разных кружках. Используя диаграмму (рис. 34.5), дайте ответы на вопросы.

1) Какой кружок посещает больше всего семиклассников?

2) Какие кружки посещает одинаковое количество семиклассников?

3) Какую часть от количества учеников, занимающихся в кружке компьютерного дизайна, составляет количество учеников, занимающихся в кружке рисования?

4) Сколько процентов составляет количество учеников, занимающихся в кружке лепки, от количества учеников, занимающихся в кружке радиотехники?

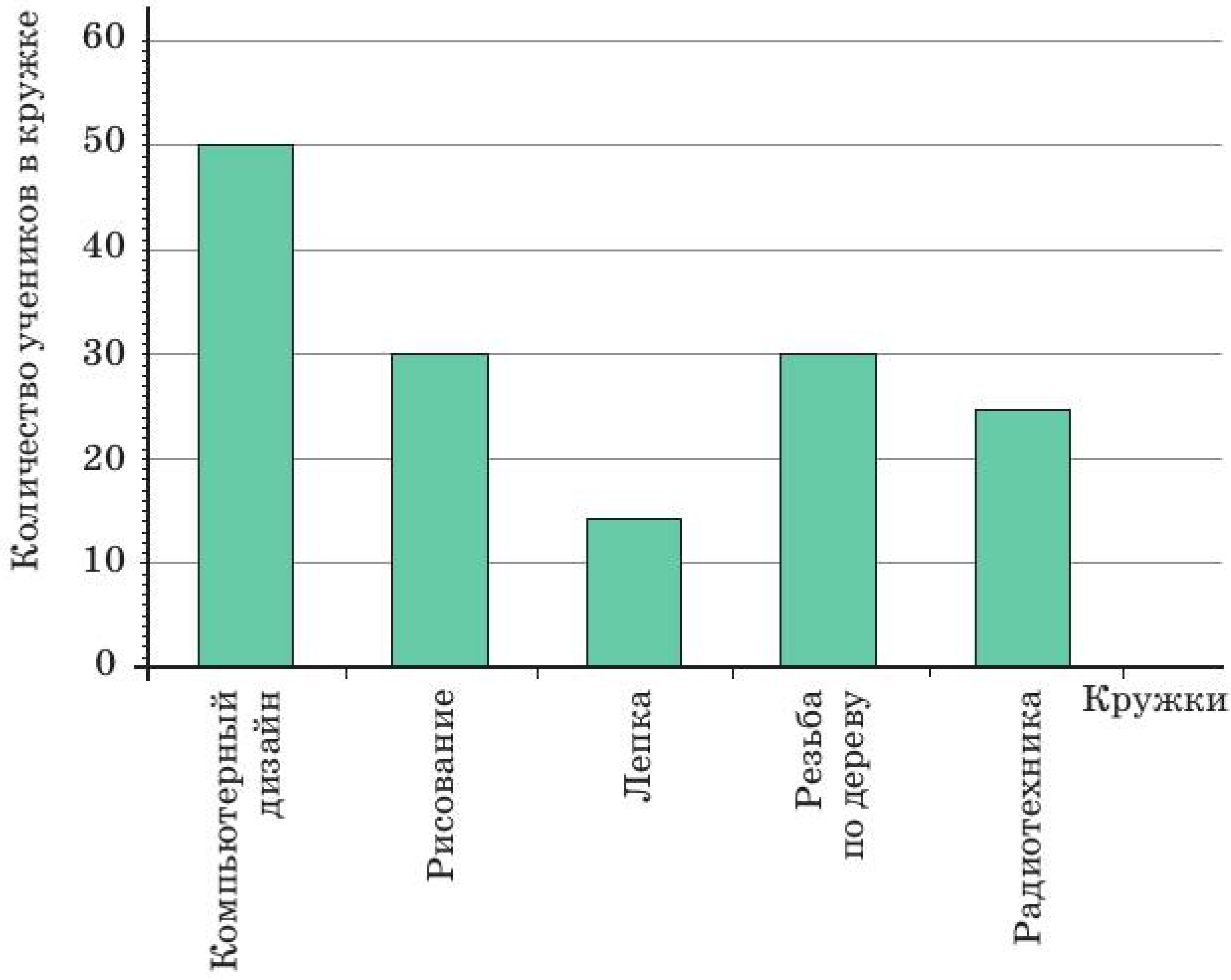


Рис. **34.5**

34.3. Используя таблицу среднегодовых температур воздуха в отдельных городах России, постройте соответствующую столбчатую диаграмму.

Город	Температура, °C	Город	Температура, °C
Екатеринбург	2,7	Оренбург	5,0
Казань	4,1	Пермь	2,3
Краснодар	11,4	Тула	5,2
Мурманск	0,3	Хабаровск	2,2
Нижний Новгород	4,4	Челябинск	2,9

34.4. Используя таблицу развития Московского метрополитена в 1940–2010 гг., постройте график увеличения количества его станций.

Год	Количество станций	Год	Количество станций
1940	22	1980	115
1950	35	1990	143
1960	56	2000	161
1970	89	2010	182

34.5. Определите, является ли репрезентативной выборка.

1) Чтобы узнать, как часто жители города в выходные дни бывают на природе, были опрошены члены трёх садовых кооперативов.

2) В целях выяснения знания семиклассниками творчества А.С. Пушкина случайным образом были опрошены 5000 семиклассников в разных регионах страны.

3) Для определения процента пользователей Интернета от общего населения России случайным образом были опрошены 1000 москвичей.

4) Для выяснения рейтинга молодёжной телепрограммы случайным образом были опрошены 10 000 юношей и девушек в возрасте от 15 до 20 лет в разных регионах.

34.6. В школе измерили рост 90 шестиклассников с точностью до 5 см. Результаты измерений отобразили в виде столбчатой диаграммы (рис. 34.6). Укажите моду данной выборки.

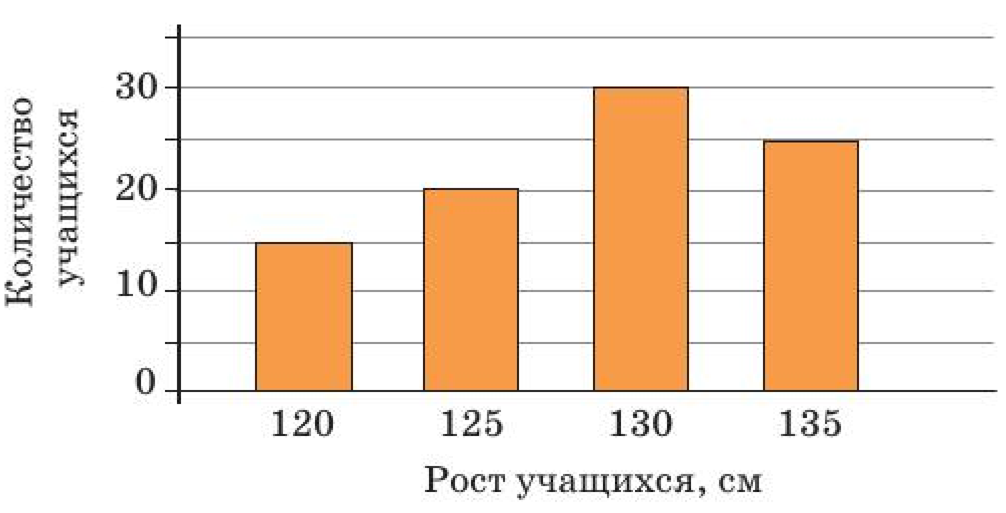


Рис. **34.6**

34.7. На графике (рис. 34.7) отображены объёмы продажи пирожков в школьном буфете в течение одной недели. Сколько в среднем продавали пирожков за один день?

Рис. **34.7**

34.8. На гистограмме (рис. 34.8) отображены объёмы продаж учебников по математике в течение пяти месяцев в одном из магазинов. Сколько учебников по математике продавали в среднем за один месяц?

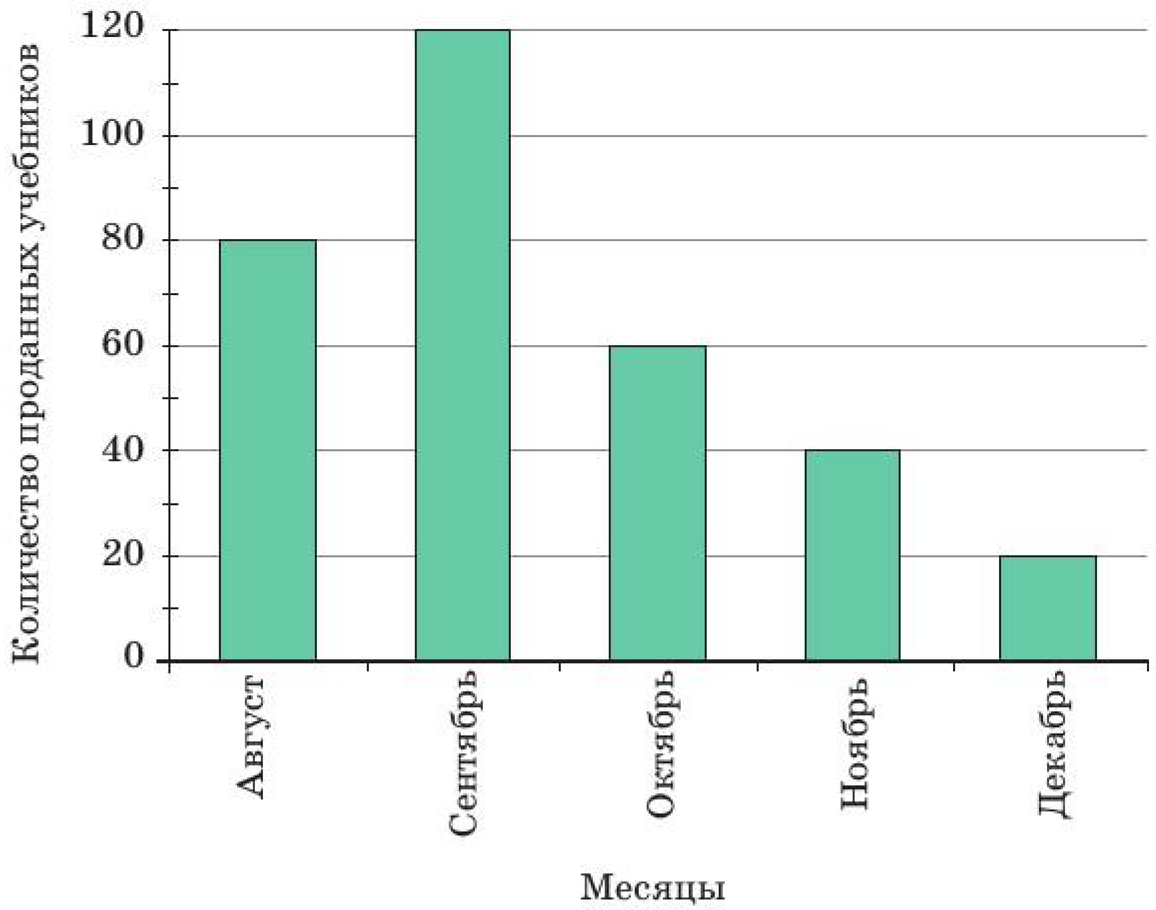


Рис. **34.8**

34.9. Найдите среднее значение, моду, медиану и размах совокупности данных:

1) 3, 3, 4, 4, 7, 7, 7, 7, 8, 8, 10;

2) 12, 13, 14, 16, 18, 18, 19, 19, 19.

34.10. Мальчики 7 класса на уроке физкультуры сдавали зачёт по прыжкам в высоту. Учитель записал такую последовательность результатов: 105 см, 65 см, 115 см, 100 см, 105 см, 110 см, 110 см, 115 см, 110 см, 100 см, 115 см. Найдите среднее значение, моду, медиану и размах полученных данных.

34.11. Классный руководитель 7 класса ведёт учёт посещения учащимися занятий. В конце недели его записи выглядели так.

День недели	Понедельник	Вторник	Среда	Четверг	Пятница
Количество отсутствующих	3	2	5	4	8

1) Найдите, сколько учащихся отсутствовало в среднем в день в течение этой недели.

2) Найдите моду полученных данных.

34.12. В 7 классе, в котором учится 23 ученика, провели опрос: сколько приблизительно часов в день тратит семиклассник на выполнение домашних заданий. Ответы учащихся представлены в виде гистограммы (рис. 34.9).

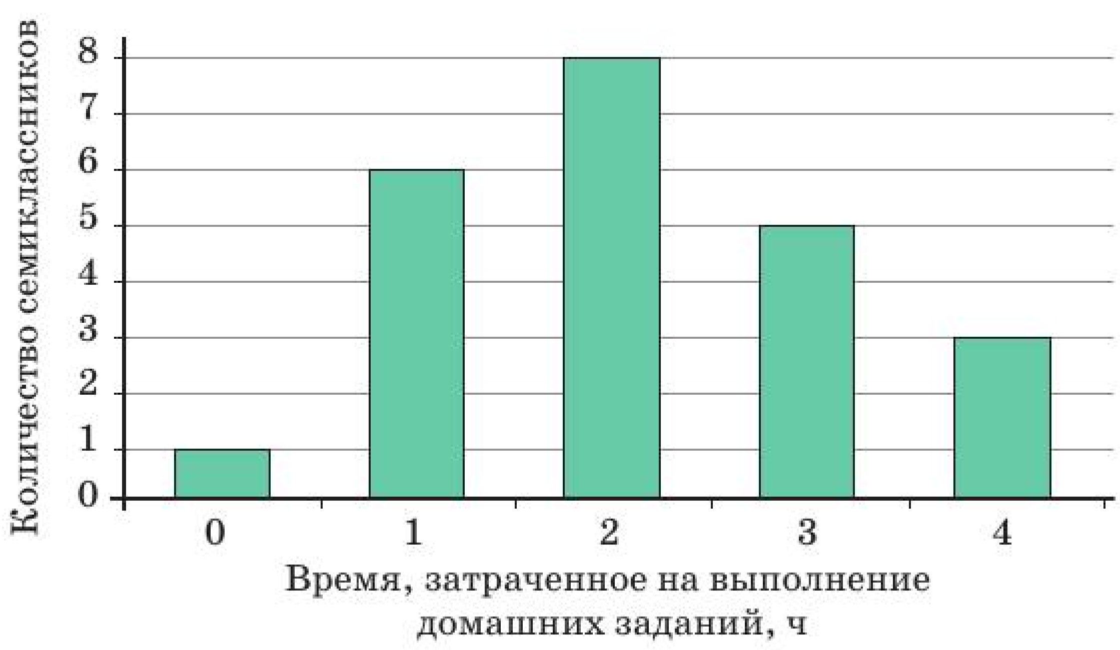


Рис. **34.9**

1) Заполните частотную таблицу.

Время, затраченное на выполнение домашних заданий, ч	0	1	2	3	4
Частота					
Относительная частота, %					

2) Сколько времени в день в среднем учащийся этого класса выполняет домашнее задание? (Найдите среднее значение ряда данных.)

3) Сколько времени выполняет домашнее задание большинство учеников этого класса? (Найдите моду ряда данных.)

34.13. В таблице приведено распределение по возрасту отдыхающих в молодёжном спортивном лагере в один из летних месяцев.

Возраст, лет	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
Количество отдыхающих	12	21	20	32	20	20	19	24	15	17
Относительная частота, %										

1) Заполните третью строку таблицы.

2) Найдите моду и среднее значение полученных данных.

34.14. Учащихся одной пятигорской школы опросили: сколько раз они летали на самолёте. Полученные данные приведены в таблице.

Количество полётов	0	1	2	3	4	5
Количество учащихся	280	92	56	38	20	14
Относительная частота, %						

1) Заполните третью строку таблицы.

2) Представьте полученные данные в виде столбчатой диаграммы.

3) Найдите моду и среднее значение полученных данных.

4) Поясните, можно ли считать рассматриваемую выборку репрезентативной для выводов относительно всех школьников города Пятигорска.

34.15. В течение первых десяти дней мая температура воздуха в 6 ч утра была такой: 16 °C; 14 °C; 12 °C; 16 °C; 15 °C; 15 °C; 13 °C; 15 °C; 17 °C; 14 °C. Найдите меры центральной тенденции полученной совокупности данных. Заполните частотную таблицу.

Температура воздуха, °C	
Частота	
Относительная частота, %	

34.16. В таблице приведено распределение сотрудников детского сада соответственно стажу работы.

Стаж работы, лет	3	6	10	12	15	16	20
Количество сотрудников	2	4	4	3	2	4	5

Найдите моду и среднее значение выборки, постройте соответствующую гистограмму.

34.17. У 24 легковых автомобилей сделали замеры расхода горючего на 100 км пути и получили ряд данных: 8 л, 9 л, 7,5 л, 9 л, 10 л, 8,5 л, 9 л, 8 л, 7,5 л, 9 л, 10 л, 7,5 л, 9 л, 10 л, 7,5 л, 8,5 л, 8 л, 7,5 л, 8,5 л, 10 л, 8,5 л, 9 л, 8 л, 7,5 л.

1) Составьте частотную таблицу.
2) Найдите среднее значение и моду данной выборки.
3) Постройте соответствующую гистограмму.

34.18. Во время тестирования по алгебре 25 учеников 7 класса сделали следующее количество ошибок: 4, 3, 3, 1, 3, 4, 4, 5, 3, 0, 1, 4, 4, 4, 5, 3, 5, 4, 0, 4, 1, 4, 2, 2, 3.

1) Составьте частотную таблицу.
2) Найдите среднее значение и моду данной выборки.
3) Постройте соответствующую гистограмму.

34.19. Выпишите все ваши оценки по алгебре, полученные в течение года. Найдите среднее значение, моду и медиану полученного ряда данных.

34.20. Директор фирмы получает 120 000 р. в месяц, два его заместителя по 80 000 р., а остальные 17 работников фирмы — по 20 000 р. в месяц. Найдите среднее значение, моду, медиану заработной платы в этой фирме.

34.21. Прочтите отрывок из стихотворения А.С. Пушкина.

Унылая пора! Очей очарованье!
Приятна мне твоя прощальная краса —
Люблю я пышное природы увяданье,
В багрец и в золото одетые леса,
В их сенях ветра шум и свежее дыханье,
И мглой волнистою покрыты небеса,
И редкий солнца луч, и первые морозы,
И отдалённые седой зимы угрозы.

Составьте частотную таблицу наличия букв «а», «е», «и», «б», «н», «о», «р», «у», «ф», «я» в данном стихотворении. Определите моду полученных данных.

34.22. Постройте ряд: 1) из пяти чисел; 2) из шести чисел, у которого:

а) среднее значение равно медиане;

б) среднее значение больше медианы.

Упражнения для повторения

34.23. Четыре одинаковых экскаватора, работая вместе, вырыли траншею за 12 ч. За какое время 6 таких же экскаваторов, работая вместе, выроют 3 такие траншеи?

34.24. Каждый букет состоит из 2 красных и 3 белых роз. Какое наибольшее количество таких букетов можно составить из 40 красных и 50 белых роз?

34.25. Числа a, b и c таковы, что $a + b + c = 0$. Докажите, что $a^3 + a^2c - abc + b^2c + b^3 = 0$.

34.26. Докажите, что значение выражения 444 444 + 1111 – 666 — квадрат натурального числа.

Итоги главы 5

Правило суммы

Если множество A состоит из m элементов, а множество B — из k элементов, причём эти множества не имеют общих элементов, то выбор «a или b», где $a \in A$, $b \in B$, можно осуществить $m + k$ способами.

Правило произведения

Если элемент a можно выбрать m способами и после каждого такого выбора элемент b можно выбрать k способами, то выбор «a и b» в указанном порядке можно осуществить mk способами.

Статистика

Статистика (от латинского слова *status* — «состояние») — это наука о сборе, обработке и анализе количественных данных, которые характеризуют массовые явления.

Этапы статистического исследования

Сбор данных

↓

Обработка данных и их представление в удобной форме

↓

Анализ данных

↓

Выводы и рекомендации

Проектная работа

Эта рубрика адресована прежде всего тем, кто хочет научиться приобретать знания самостоятельно, творчески мыслить, формировать, выражать и отстаивать свою точку зрения, выдвигать гипотезы, находить наиболее рациональные и нестандартные решения.

Первым шагом, который может помочь в реализации этих целей, является участие в проектной работе.

Проект — это самостоятельное исследование по выбранной теме, которое может выполняться как индивидуально, так и группой учащихся.

Дадим несколько советов по организации работы над проектом и оформлению результатов исследования.

1. При выборе темы необходимо учитывать её актуальность, наличие источников информации в литературе и интернет-ресурсов. Здесь важно ваше желание проявить себя в качестве исследователя в работе именно над выбранной темой.
2. Работа начинается с составления предварительного плана, в котором отражаются замысел и этапы реализации задуманного. После знакомства с основными источниками и литературой при помощи руководителя проекта составляется окончательный план.
3. Важно чётко сформулировать цели исследования. Они могут быть записаны в такой форме: изучить, описать, проанализировать, доказать, сравнить и т. п.
4. Работа завершается подведением итогов исследования, делаются выводы, намечаются перспективы дальнейшего изучения темы.
5. Примерный объём работы — 10–15 страниц. Дополнительно может прилагаться иллюстративный материал.
6. Работа может быть оформлена в виде реферата, доклада, компьютерной презентации.

Ниже приводится рекомендуемый список тем, которые могут быть выбраны для проектной работы.

1. Л.Ф. Магницкий и его «Арифметика»

Рекомендуемые литература и интернет-ресурсы:

1) http://virtmuseum.aonb.ru/z6/z6_arifm.html «Арифметика» Магницкого.
2) *Галанин Д.Д.* Магницкий и его арифметика. Вып. 2. — М., 1914.
3) *Каменева Т.Н.* К истории издания «Арифметики» Магницкого. Исследования и материалы. — М. : Книга, 1984.
4) *Шикман А.П.* Деятели отечественной истории. Биографический справочник. — М., 1997.
5) http://ru.wikipedia.org/wiki/ Магницкий Леонтий Филиппович.

6) *Волков А.* Арифметика Леонтия Магницкого // Квант. — 1991. — № 7.
7) Энциклопедия для детей. Т. 11: Математика. — М. : Аванта +, 2003.
8) http://www.kvant.info/ Научно-популярный физико-математический журнал для школьников и студентов «Квант».

2. Аликвотные дроби

Рекомендуемые литература и интернет-ресурсы:

1) *Выгодский М.Я.* Арифметика и алгебра в Древнем мире. — М. : Наука, 1967.
2) *Раик А.Е.* Очерки по истории математики в древности. — Саранск : Мордовское гос. изд-во, 1977.
3) http://ru.wikipedia.org/wiki/ Папирус Ахмеса.
4) http://ru.wikipedia.org/wiki/ Египетские дроби.
5) http://www.kvant.info/ Научно-популярный физико-математический журнал для школьников и студентов «Квант».
6) *Левитас Г.Г.* Нестандартные задачи по математике. — М. : ИЛЕКСА, 2007.
7) *Гаврилова Т.Д.* Занимательная математика. 5–11 классы. — Волгоград : Учитель, 2008.
8) *Фарков А.В.* Математические олимпиады в школе. 5–11 классы. — М. : Айрис-пресс, 2005.

3. Системы счисления

Рекомендуемые литература и интернет-ресурсы:

1) http://sdo.uspi.ru/mathem&inform/dopoln/dop_lek3/dop_lek3.htm Системы счисления.
2) http://pmi.ulstu.ru/new_project/sistsch/ist.htm
3) http://umk.portal.kemsu.ru/uch-mathematics/papers/posobie/r1-1.htm
4) *Фомин С.В.* Системы счисления. — М. : Наука, 1987.
5) *Яглом И.М.* Системы счисления // Квант. — 1970. — № 6.
6) Факультативный курс по математике. 7–9 / сост. И.Л. Никольская. — М. : Просвещение, 1991.
7) *Галкин Е.В.* Нестандартные задачи по математике. — Челябинск : Взгляд, 2005.
8) http://www.kvant.info/ Научно-популярный физико-математический журнал для школьников и студентов «Квант».

4. Игры и стратегии

Рекомендуемые литература и интернет-ресурсы:

1) *Савин А.П.* Математические миниатюры. — М. : Детская литература, 1991.
2) Магия чисел и фигур / авт.-сост. В.В. Трошин. — М. : Глобус, 2007.

3) *Генкин С.А., Итенберг И.В., Фомин Д.В.* Ленинградские математические кружки. — Киров : АСА, 1984.
4) http://www.kvant.info/ Научно-популярный физико-математический журнал для школьников и студентов «Квант».
5) http://www.edu.ru/ Российское образование. Федеральный портал.
6) http://school-collection.edu.ru/ Единая коллекция цифровых образовательных ресурсов.
7) *Шень А.* Игры и стратегии с точки зрения математики. — М. : МЦНМО, 2007.

5. Математические софизмы

Рекомендуемые литература и интернет-ресурсы:

1) Энциклопедия для детей. Т. 11: Математика. — М. : Аванта +, 2003.
2) http://www.math.ru/lib/ Электронная библиотека книг по математике.
3) *Мадера А.Г., Мадера Д.А.* Математические софизмы: правдоподобные рассуждения, приводящие к ошибочным утверждениям. — М. : Просвещение, 2003.
4) http://school-collection.edu.ru/ Единая коллекция цифровых образовательных ресурсов.
5) *Конфорович А.Г.* Математические софизмы и парадоксы. — Киев : Рад. шк., 1983.

6. Математические фокусы

Рекомендуемые литература и интернет-ресурсы:

1) *Лонге Б.* Математические фокусы. — М. : АСТ : Астрель, 2006.
2) *Савин А.П.* Математические миниатюры. — М. : Детская литература, 1991.
3) Магия чисел и фигур / авт.-сост. В.В. Трошин. — М. : Глобус, 2007.
4) http://www.kvant.info/ Научно-популярный физико-математический журнал для школьников и студентов «Квант».
5) Энциклопедия для детей. Т. 11: Математика. — М. : Аванта +, 2003.
6) *Гарднер М.* Математические фокусы и головоломки. — М. : Наука, 1978.
7) http://www.math.ru/lib/ Электронная библиотека книг по математике.
8) http://trick.fome.ru/main-5.html Математические фокусы.
9) http://goodmagic.ru/category/fokus-matematicheskie/ Фокусы и трюки.

7. Принцип Дирихле

Рекомендуемые литература и интернет-ресурсы:

1) *Андреев А.А., Горелов Г.Н., Люлев А.И., Савин А.Н.* Принцип Дирихле. Вып. 1. — Самара : Пифагор, 1997.
2) *Летчиков А.В.* Принцип Дирихле. — Ижевск : Изд-во Удмуртского университета, 1992.

3) *Спивак А.В.* Математический кружок. 6–7 классы. — М. : МЦНМО, 2011.
4) *Горбачев Н.В.* Сборник олимпиадных задач по математике. — М. : МЦНМО, 2004.
5) *Генкин С.А., Итенберг И.В., Фомин Д.В.* Ленинградские математические кружки. — Киров : АСА, 1984.
6) *Ядренко М.И.* Принцип Дирихле и его применение. — Киев : Вища школа, 1985.
7) *Болтянский В.Г.* Шесть зайцев в пяти клетках // Квант. — 1977. — № 2.
8) http://www.develop-kinder.com/ Математика — для развития детей.
9) http://mmmf.msu.ru/ Малый мехмат МГУ.
10) http://problems.ru/articles/216.php Принцип Дирихле. Задачи.

8. Логические задачи

Рекомендуемые литература и интернет-ресурсы:

1) *Лихтарников Л.М.* Задачи мудрецов. — М. : Просвещение : Учебная литература, 1996.
2) *Байиф Ж.-К.* Логические задачи. — М. : Мир, 1983.
3) *Горбачев Н.В.* Сборник олимпиадных задач по математике. — М. : МЦНМО, 2004.
4) *Смаллиан Р.М.* Алиса в стране смекалки. — М. : Мир, 1987.
5) http://www.develop-kinder.com/ Математика — для развития детей.
6) http://mmmf.msu.ru/ Малый мехмат МГУ.
7) http://nazva.net/ Задачи.
8) http://www.braingames.ru/?path=category&catname=logic Задачи, загадки, логические игры, ребусы, математика.

9. Принцип крайнего

Рекомендуемые литература и интернет-ресурсы:

1) *Генкин С.А., Итенберг И.В., Фомин Д.В.* Ленинградские математические кружки. — Киров : АСА, 1984.
2) http://bars.na.by/teachers/extremal.html Принцип крайнего.
3) http://school-collection.edu.ru/ Единая коллекция цифровых образовательных ресурсов.
4) *Горбачев Н.В.* Сборник олимпиадных задач по математике. — М. : МЦНМО, 2004.
5) http://www.kvant.info/ Научно-популярный физико-математический журнал для школьников и студентов «Квант».
6) *Прасолов В.В.* Задачи по планиметрии. — М. : МЦНМО, 2006.
7) http://www.problems.ru/ Задачи из разных разделов математики.
8) http://mmmf.msu.ru/archive/20062007/z9-10/21.html Принцип крайнего.

10. Тайны простых чисел

Рекомендуемые литература и интернет-ресурсы:

1) *Галкин Е.В.* Нестандартные задачи по математике. — Челябинск : Взгляд, 2005.
2) http://www.edu.ru/ Российское образование. Федеральный портал.
3) http://school-collection.edu.ru/ Единая коллекция цифровых образовательных ресурсов.
4) *Савин А.П.* Математические миниатюры. — М. : Детская литература, 1991.
5) *Генкин С.А., Итенберг И.В., Фомин Д.В.* Ленинградские математические кружки. — Киров : АСА, 1984.
6) *Гальперин Г.А.* Просто о простых числах // Квант. — 1987. — № 4.
7) *Васильев И.В., Гутенмахер В.Л.* Арифметика и принципы подсчёта // Квант. — 1983. — № 1.

Дружим с компьютером

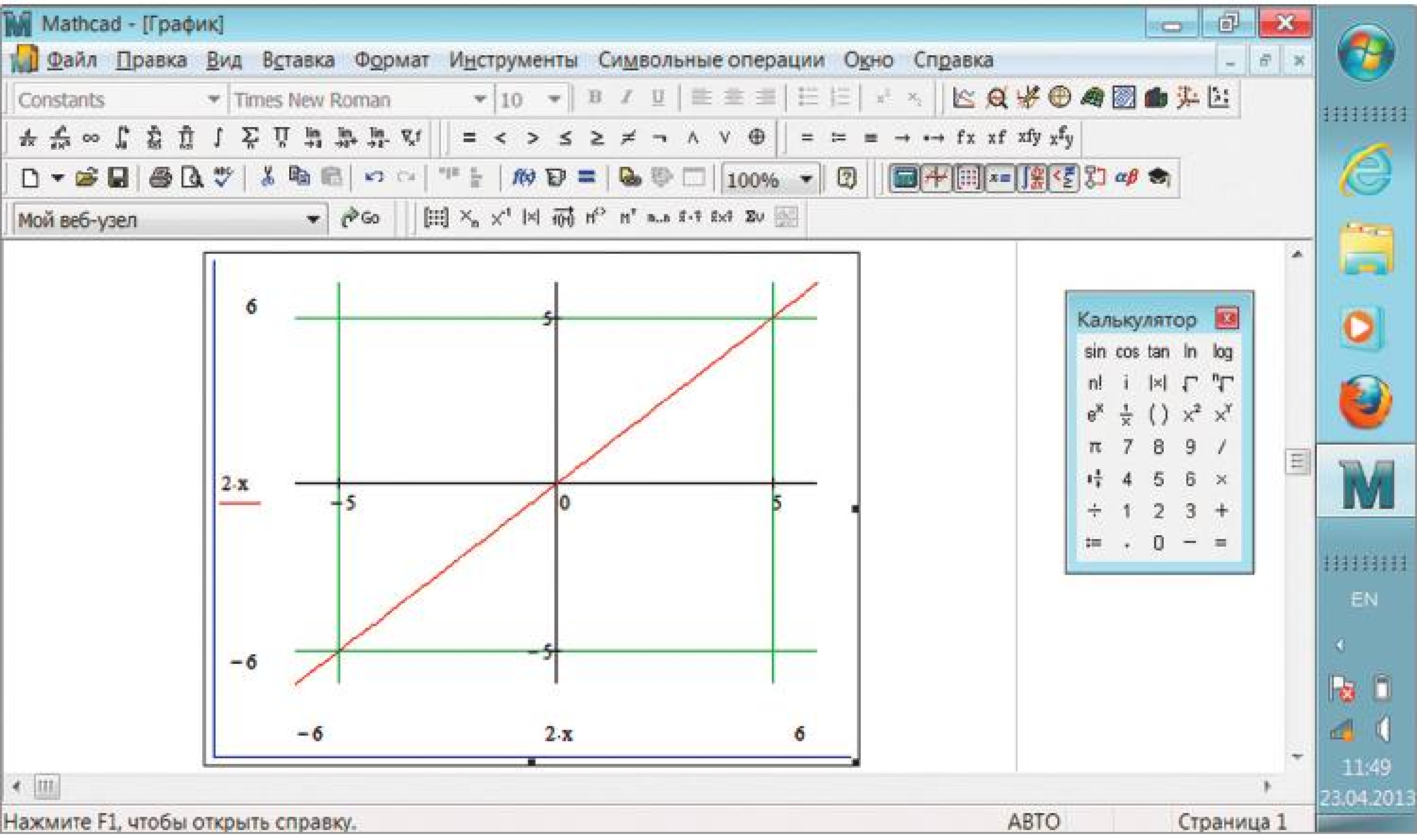
Изучая математику в 5 и 6 классах, вы уже пользовались компьютером и, наверное, оценили, каким надёжным помощником он может быть. Поможет компьютер и в изучении алгебры.

Вы уже умеете:

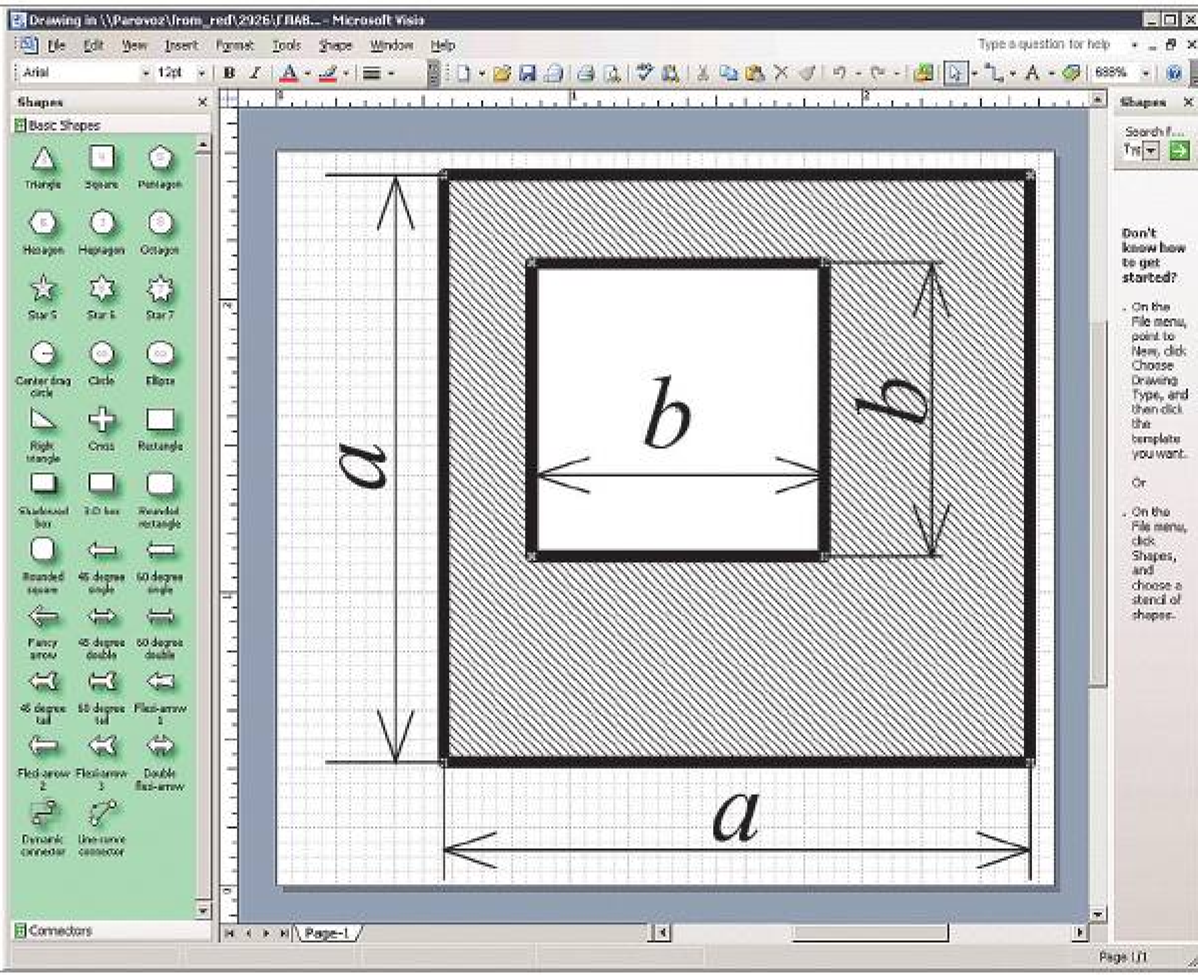
- пользоваться **калькулятором** для вычислений;
- набирать и оформлять несложные тексты в **текстовом редакторе** (например, Microsoft Word);
- составлять таблицы с помощью **редактора таблиц** (например, Microsoft Excel);
- рисовать с помощью **графического редактора** (например, Paint);
- пользоваться глобальной сетью **Интернет** — искать в ней информацию.

Все эти умения вы будете совершенствовать и при изучении алгебры.

Существуют специализированные математические пакеты, которые помогают школьникам и студентам выполнить техническую работу при решении задач. Это, например, MathLAB, MathCAD. Если вы хотите в будущем стать математиком, программистом, инженером, т. е. широко использовать математику в своей работе, то вам будет полезно освоить такие пакеты. Также важно научиться работать с графическим редактором, с помощью ко-



торого можно работать с геометрическими фигурами и строить чертежи. Примерами таких редакторов могут быть CorelDraw, Visio и т. п.



А если вы захотите сделать доклад или интересное сообщение, то удобно пользоваться **программой для построения презентаций** (например, PowerPoint). С её помощью можно сделать мультфильм с математическим сюжетом.

Кроме этого, существует много программ, созданных специально для школьников. Эти программы тоже помогают в изучении математики. Вот ссылки на некоторые из них:

http://www.pcmath.ru/ Компьютерные программы по математике

http://obr.1c.ru/catalog.jsp?top=3 Образовательные программы по математике

http://school-collection.edu.ru/ Единая коллекция цифровых образовательных ресурсов

Конечно, это далеко не всё, что есть на просторах Интернета. Ищите, интересуйтесь, общайтесь со своими сверстниками, и вы найдёте много интересного. А может, став постарше, вы и сами разработаете полезные программы, помогающие лучше осваивать математику.

Задания с элементами информатики

В этом разделе приведены задания, которые вы сможете выполнять с помощью компьютера по мере изучения соответствующих тем. Некоторые из этих заданий — продолжение и развитие упражнений этого учебника, которые вы будете решать на уроках и дома (такие упражнения в тексте учебника отмечены значком). В этом разделе указан номер соответствующего задания.

На уроках информатики вы будете изучать элементы программирования. Главное в программировании — это создать алгоритм, т. е. последовательность шагов, с помощью которой из входных данных можно получить выходные данные. В этом разделе вы найдёте много таких заданий. Эти задания не являются обязательными для выполнения. Они в первую очередь адресованы тем, кто уже ознакомился с элементами программирования. Но со временем по мере приобретения новых знаний на уроках информатики многие из этих заданий вы сможете выполнить.

А если вы уже осваиваете какой-то язык программирования, то можете не только придумать алгоритм, но и написать программу для его реализации. Если вы любите программирование, постарайтесь сделать это для всех заданий данного раздела, хотя среди них есть и довольно сложные.

Задания, в которых требуется использование какого-либо языка программирования, отмечены знаком *.

К § 1 «Введение в алгебру»

Как используются переменные при составлении алгоритмов? Почему использование переменных позволяет решить не одну-единственную задачу, а целую группу аналогичных задач?

Если выражение содержит деление на переменную, то всегда ли оно имеет смысл? Как надо учесть это при составлении алгоритмов и написании программ?

К § 2 «Линейное уравнение с одной переменной»

Запишите алгоритм, для которого входными данными являются значения чисел a и b, а выходными — решение линейного уравнения $ax = b$. Какие случаи надо предусмотреть, чтобы этот алгоритм выдавал верный ответ для любых значений a и b?

К § 3 «Решение задач с помощью уравнений»

Некоторые задачи этого параграфа похожи. Это значит, что их математическая модель одинакова.

Найдите такие задачи. Создайте для них математическую модель и напишите алгоритм для их решения. Какие величины будут для этого алгоритма входными данными, а какие — выходными?

Вы знаете, что полученный ответ надо проверить на соответствие условию задачи. Можете ли вы записать условия, которым должен соответствовать ответ для данного типа задач?

Что надо сделать, если в ответе получается дробное число? Рассмотрите эту ситуацию для различных типов задач.

3.51. Некоторые задачи легко решать перебором, т. е. подставив вместо переменной все возможные её значения и проверив полученный результат. Запишите алгоритм для решения этой задачи перебором. Сколько возможных значений надо проверить?

К § 4 «Тождественно равные выражения. Тождества»

Можно ли с помощью компьютера доказать тождество, перебрав все возможные значения входящих в него переменных и вычислив при этих значениях переменных значения левой и правой частей тождества?

4.19. Запишите алгоритм, с помощью которого можно решить эту задачу. Составьте ещё несколько задач, которые можно решить с использованием этого же алгоритма.

К § 5 «Степень с натуральным показателем»

Запишите алгоритм, входными данными для которого являются основание степени a и показатель степени n, а выходными — степень числа a с показателем n. Для какого значения показателя надо рассмотреть отдельный случай?

5.47, 5.48. Запишите алгоритмы, с помощью которых можно решить эти задачи.

5.49. Как можно использовать калькулятор для облегчения технической работы при решении этой задачи?

К § 6 «Свойства степени с натуральным показателем»

Напишите программу, которая иллюстрирует одно из свойств степени с натуральным показателем.

Проиллюстрируйте свойства степени с помощью калькулятора. Почему при маленьких значениях основания и показателя степени результат получается наглядным, а если увеличить исходные данные — то нет?

К § 7 «Одночлены»

* Как на языке программирования, который вы изучаете, записать одночлен? Что для этого требуется, кроме чисел и переменных? Какова принципиальная разница между записью одночлена в математике и в программировании?

Придумайте какой-нибудь одночлен. Напишите алгоритм для вычисления его значения. Что будет входными данными для этой программы, а что — выходными?

* Составьте программу по этому алгоритму. Вычислите значение одночлена при нескольких значениях переменных вручную и с помощью программы.

* Как записать в тексте программы обыкновенную дробь?

7.28. Запишите алгоритм, с помощью которого можно решить эту задачу. Составьте ещё несколько задач, которые можно решить с использованием этого же алгоритма.

Запишите алгоритм решения этой задачи для переменного количества увеличений (уменьшений) числа на различное количество процентов.

К § 8 «Многочлены»

Запишите алгоритм для определения степени многочлена.

* Как на языке программирования, который вы изучаете, записать многочлен?

Придумайте какой-нибудь многочлен. Напишите алгоритм для вычисления его значения.

* Многочлен представляет собой выражение. В каком порядке выполняются операции при вычислении его значения в математике? А на выбранном вами языке программирования? Как надо это учесть при составлении программы?

Запишите алгоритм приведения произвольного многочлена к стандартному виду. Как надо представить многочлен, чтобы по этому алгоритму с ним мог работать не человек, а компьютер? Какая структура данных для этого нужна?

К § 9 «Сложение и вычитание многочленов»

* Как используются скобки в выбранном вами языке программирования? Как они влияют на порядок вычисления выражений?

Запишите алгоритм для сложения (вычитания) двух произвольных многочленов. Можно ли для этого алгоритма использовать способ представления многочленов, который вы придумали для приведения многочленов к стандартному виду?

9.38. В этой задаче используется форма записи $\overline{abc}$. Запишите алгоритм, для которого входными данными являются значения переменных a, b, c, а выходными — значение числа $\overline{abc}$.

Напишите алгоритм, для которого количество цифр в этой записи будет переменным.

9.45. Можно ли решить эту задачу с помощью алгоритма, составленного вами для решения задачи 7.28?

К § 10 «Умножение одночлена на многочлен»

* Как записать в выбранном вами языке программирования произведение одночлена и многочлена?

Запишите алгоритм для умножения двух одночленов и представления результата в виде одночлена стандартного вида.

К § 11 «Умножение многочлена на многочлен»

* Как записать в выбранном вами языке программирования произведение двух многочленов?

Каким образом строят сложные алгоритмы, используя в качестве «кирпичиков» более простые? Ознакомьтесь с понятием подпрограммы. Как можно с помощью этого понятия представить алгоритм умножения многочленов, используя отдельные алгоритмы умножения одночленов, сложения многочленов и приведения многочлена к стандартному виду?

Запишите алгоритм для умножения двух многочленов и представления результата в стандартном виде.

11.38. Сформулируйте эту задачу в общем виде. Какие данные являются для этой задачи входными, а какие — выходными? Создайте математическую модель этой задачи. Запишите алгоритм решения этой задачи в общем виде.

К § 12 «Разложение многочленов на множители. Вынесение общего множителя за скобки»

12.29. Упростите выражение, приведённое в этом упражнении. Выберите какие-нибудь значения переменных. Вычислите с помощью калькулятора сначала значение исходного выражения, затем — значение упрощённого выражения. Насколько упрощение выражения облегчило работу по вычислению его значения?

12.39. Запишите алгоритм для решения этой задачи перебором всех двузначных чисел.

12.48. Запишите алгоритм для решения этой задачи перебором всех двузначных чисел.

К § 13 «Разложение многочленов на множители. Метод группировки»

13.24. Сформулируйте эту задачу в общем виде. Какие данные являются для этой задачи входными, а какие — выходными? Создайте математическую модель этой задачи. Запишите алгоритм решения этой задачи в общем виде.

К § 14 «Произведение разности и суммы двух выражений»

* 14.20. Напишите программу для вычисления значения выражения, приведённого в этой задаче. Можно ли с помощью этой программы доказать утверждение задачи?

К § 15 «Разность квадратов двух выражений»

15.3. Можете ли вы сформулировать алгоритм, которым пользовались при решении этой задачи?

15.12. Запишите алгоритм для решения этой задачи.

15.13. Запишите алгоритм для решения этой задачи. Каким образом вы зададите число π?

К § 16 «Квадрат суммы и квадрат разности двух выражений. Квадрат суммы нескольких выражений»

16.22, 16.23. Можно ли для этих задач создать общую математическую модель? Запишите общий алгоритм решения задач.

К § 17 «Преобразование многочлена в квадрат суммы или разности двух выражений либо в квадрат суммы нескольких выражений»

17.3. Можете ли вы сформулировать алгоритм, которым пользовались при решении этой задачи?

17.51. Можно ли составить алгоритм для решения этой задачи перебором? Почему?

К § 18 «Сумма и разность кубов двух выражений»

18.3. Запишите алгоритм, с помощью которого можно разложить на множители сумму или разность двух одночленов с помощью формул суммы или разности кубов двух выражений. Какие входные данные надо предусмотреть, чтобы этот алгоритм работал для как можно более разнообразных одночленов?

К § 19 «Куб суммы и куб разности двух выражений»

Запишите алгоритм для возведения двучлена в куб и представления результата в виде многочлена стандартного вида. Какие уже созданные вами алгоритмы можно использовать в качестве подпрограмм?

К § 21 «Формулы для разложения на множители выражений вида $a^n - b^n$ и $a^n + b^n$»

Запишите алгоритм для разложения на множители выражений вида $a^n - b^n$ и $a^n + b^n$. Как надо представить входные данные? Для всех ли входных данных может быть получен результат? Какие проверки входных данных в связи с этим надо выполнить?

К § 22 «Множество и его элементы»

Пусть задано некоторое множество чисел. Напишите алгоритм, который по заданному числу определяет, является ли оно элементом данного множества. Какую структуру данных вы используете для представления множества?

К § 23 «Связи между величинами. Функция»

Напишите алгоритм, иллюстрирующий пример 2 этого параграфа. Какие входные данные надо предусмотреть, чтобы этот алгоритм был как можно более гибким (т. е. его можно было бы применять для как можно более широкого круга случаев)?

В упражнениях этого параграфа описаны разнообразные функциональные зависимости между величинами. Для каждой из этих зависимостей определите независимую переменную и запишите алгоритм, для которого входными данными будут значения независимой переменной, а выходными — значения зависимой переменной.

23.4 Запишите алгоритм для вычисления зависимости объёма V воды в цистерне от времени t, в течение которого из неё выливается вода. Какой ответ должен выдавать этот алгоритм после того, как вся вода из цистерны выльется? Сделайте вывод: как надо при составлении алгоритмов учитывать область определения функции.

К § 24 «Способы задания функции»

Создайте в текстовом и (или) табличном редакторе таблицу, которая задаёт некоторую функцию.

Изучите инструменты этого редактора, которые позволяют заполнить таблицу с помощью формулы, задающей функцию. Выполните, используя эти инструменты, какие-нибудь задания данного параграфа.

К § 25 «График функции»

Какие изображения надо разместить на экране компьютера, чтобы получить график функции?

Освойте инструменты текстового и (или) табличного редактора для построения графика функции, заданной таблично. Какие элементы оформления позволяют сделать график наглядным?

Знаете ли вы какие-то компьютерные программы, которые позволяют построить график произвольной функции?

* Изучая программирование, вы сможете написать свою программу, рисующую график произвольной функции на экране компьютера. Какие инструменты программирования вам надо для этого освоить?

К § 26 «Линейная функция, её график и свойства»

Запишите алгоритм, который по входным данным k и b определит, какая прямая является графиком функции $y = kx + b$: горизонтальная или негоризонтальная, проходящая через начало координат или нет.

Создайте в текстовом и (или) табличном редакторе таблицу, которая задаёт какую-либо линейную функцию. С помощью средств этого редактора постройте график этой функции.

К § 27 «Уравнения с двумя переменными»

Предположим, что у вас есть подпрограмма, входными данными для которой является пара чисел, а выходными — ответ, является ли эта пара чисел решением некоторого уравнения с двумя переменными. Как, используя эту подпрограмму, написать алгоритм для рисования графика этого уравнения на экране компьютера? Что ещё надо знать, чтобы график получился информативным?

К § 28 «Линейное уравнение с двумя переменными и его график»

Запишите алгоритм, который по входным данным a, b и c определяет, какая фигура является графиком уравнения $ax + by + c = 0$.

К § 29 «Системы уравнений с двумя переменными. Графический метод решения системы двух линейных уравнений с двумя переменными»

Освойте средства графического редактора, позволяющие изобразить точку с заданными координатами. Научитесь проводить прямую через две точки. Выберите какую-либо систему уравнений из данного пункта и проиллюстрируйте её решение графическим методом с помощью этого инструментария.

29.23. Запишите алгоритм для решения этой задачи методом перебора.

К § 30 «Решение систем линейных уравнений методом подстановки»

Опишите входные и выходные данные для алгоритма решения системы из двух линейных уравнений с двумя переменными. Пользуясь этими данными, запишите алгоритм решения такой системы методом подстановки. Как этот алгоритм должен предусмотреть ситуации, когда система не имеет решений? Имеет бесконечно много решений?

К § 31 «Решение систем линейных уравнений методом сложения»

Опишите входные и выходные данные для алгоритма решения системы из двух линейных уравнений с двумя переменными. Пользуясь этими данными, запишите алгоритм решения такой системы методом сложения. Как этот алгоритм должен предусмотреть ситуации, когда система не имеет решений? Имеет бесконечно много решений?

К § 32 «Решение задач с помощью систем линейных уравнений»

Предположим, что заданы координаты некоторых двух точек A и B на координатной плоскости и через эти точки проведена прямая. Задаётся абсцисса некоторой точки C, и сказано, что точка C лежит на этой же прямой. Напишите алгоритм, который находит ординату точки C. Всегда ли этот алгоритм «сработает»? Какую ситуацию надо рассмотреть отдельно и какую проверку для этого надо выполнить? Какие выходные данные для этой ситуации должен выдать алгоритм?

Ответы и указания

1.1. 1) $17\frac{4}{27}$; 2) $1\frac{1}{4}$; 3) $-0{,}3$; 4) $-1\frac{1}{3}$; 5) 1. **1.2.** 1) $11\frac{3}{5}$; 2) $1\frac{1}{4}$; 3) 4,4; 4) $-\frac{7}{10}$. **1.20.** 110 пудов.

Глава 1. **2.5.** 1) 3; 2) $\frac{2}{3}$; 3) корней нет; 4) корнем уравнения является любое число. **2.6.** 1) 5; 2) 0,8; 3) корнем уравнения является любое число; 4) корней нет. **2.7.** 1) 0,6; 2) $\frac{3}{14}$; 3) –10; 4) –0,9. **2.8.** 1) 44; 2) $\frac{1}{3}$; 3) –5,2. **2.9.** 1) $-\frac{9}{25}$; 2) корнем уравнения является любое число. **2.10.** 1) $-\frac{4}{11}$; 2) корней нет. **2.11.** 1) 0,4; –8; 2) 0; 25; 3) $\frac{2}{3}$; –12; 4) –0,6; –1; 0,3. **2.12.** 1) 6; –4,5; 2) –0,8; 3. **2.13.** 1) 10; 2) –3. **2.14.** 1) 1; 2) –1,4. **2.15.** 1) 12; 2) $4\frac{2}{3}$; 3) 2; 4) 3. **2.16.** 1) $\frac{1}{6}$; 2) 2; 3) 4,8; 4) 1; 5) $\frac{19}{34}$. **2.17.** 1) –10; 2) 3; 3) 1; 4) 0,5. **2.18.** 1) –12; 2) –0,2. **2.21.** 7) $-\frac{2}{3}$; –2; 8) 0; –1; 10) 1; 11) 8; –8. **2.22.** 4) –20; 100; 6) 2,3; –0,9; 7) 0; 4; –4; 9) 2. **2.23.** 2) 55. **2.24.** 2) $\frac{1}{3}$. **2.27.** b — любое число. **2.28.** 2) –53; –11; –5; –3; 3; 45. **2.29.** 2) 7; 11; 31. **2.30.** 1) 14; 2) $-\frac{31}{45}$. **2.31.** 1) –17; 2) 3,5. **2.32.** 2) 3; 3) 2. **2.33.** 2) 2; 3) –5. **2.34.** 1) $a \neq 5$; 2) $a \neq -7$. **2.35.** 1) Если $b \neq -1$, то $x = \frac{9}{b+1}$; если $b = -1$, то корней нет; 2) $x = -\frac{4}{b^2+1}$. **2.36.** Если $m \neq -8$, то $x = 1$; если $m = -8$, то x — любое число. **2.39.** 1) 3; 2) –1,8; 3) –1; 2; 4) корнем является любое неотрицательное число. **2.40.** 1) $-\frac{1}{3}$; 2) корней нет; 3) корнем является любое неположительное число. **2.41.** 1) a — чётное число; 2) a — нечётное число; 3) число a кратно 4; 4) таких значений не существует. **2.42.** 1) Число b кратно 3; 2) число b таково, что остаток при делении числа b на 3 равен 1; 3) таких значений не существует. **2.43.** 1) При $b > 0$; 2) при $b < 0$. **2.44.** 1) При $d < 0$; 2) при $d > 0$. **2.45.** 1) 18 ч; первый работник выполнит $\frac{2}{5}$ задания, а второй — $\frac{3}{5}$ задания. **2.46.** 240 страниц. **2.47.** 1) Чётным;

2) нечётным; 3) чётным. **2.48.** 1) Нет, $2a < a$ при $a < 0$ и $2a = a$ при $a = 0$; 2) нет, $2|a| = |a|$ при $a = 0$.

Глава 2. **3.5.** 12 м, 10 м, 8 м. **3.6.** 23 615 км^3, 908 км^3, 285 км^3. **3.9.** 20 человек. **3.10.** 90 км. **3.11.** 20 кг, 14 кг. **3.12.** 264 места, 270 мест. **3.13.** 12 км/ч, 60 км/ч. **3.14.** 112 р., 64 р. **3.15.** 36 р. **3.18.** 4 года. **3.19.** 7 лет. **3.20.** 30 словарей, 20 словарей. **3.21.** 180 000 р., 120 000 р. **3.22.** 11 монет, 8 монет. **3.23.** 800 т. **3.24.** 240 р. **3.25.** 40 кг, 8 кг. **3.26.** 600 кг, 200 кг. **3.27.** 5 дней. **3.28.** 40 л, 80 л. **3.29.** 4,5 ч, 0,5 ч. **3.30.** 24 мин. **3.31.** 50 км/ч, 20 км/ч. **3.32.** 30,5 км/ч. **3.33.** 2 км/ч. **3.34.** 45 кг, 10 кг. **3.35.** 14 кг, 10 кг. **3.36.** 60 книг. **3.37.** 160 л. **3.38.** 71 турист. **3.39.** 109 апельсинов. **3.40.** 8 дней. **3.41.** 100 задач. **3.42.** 93. **3.43.** 24. **3.44.** 55 км/ч, 65 км/ч или 70 км/ч, 80 км/ч. **3.45.** 100 кг, 200 кг. **3.46.** 20 кг, 30 кг. **3.47.** Если велосипедист и пешеход движутся навстречу друг другу, то через $\frac{7}{13}$ ч и $\frac{14}{39}$ ч; если велосипедист догоняет пешехода, то через $\frac{2}{3}$ ч и 1 ч. **3.48.** 1) 4,04; 2) –35,16; 3) $1\frac{8}{9}$; 4) $-6\frac{1}{3}$. **3.51.** 4. **3.52.** 3) x — любое неотрицательное число; 4) x — любое неположительное число. **4.15.** 24 ч. **4.16.** 206 ц. **4.17.** 1) $b < 0$; 2) $|a| < |b|$. **4.18.** Уменьшилась на 25 %. **4.19.** 16,7 %. **5.11.** 3) 16; 4) 115. **5.12.** 3) 75. **5.34.** 2; 3; 4. **5.35.** 1; 2. **5.40.** 2) $x = 1$ и $y = -2$. **5.42.** 1) $x = 0$; 2) $x = 1$. **5.43.** 1) $x = 0$; 2) $x = -3$. **5.44.** 2) *Указание*. Докажите, что последняя цифра значения выражения равна 0; 3) *Указание*. Значение выражения — это число, последняя цифра которого равна 3, а остальные — 9. **5.45.** 1) *Указание*. Докажите, что сумма цифр значения выражения равна 9; 2) *Указание*. Докажите, что последняя цифра значения выражения равна 5. **5.46.** Да. *Указание*. Рассмотрите произведение $(-ab)(-bc)(cd)(-da)$. **5.47.** 1) $8^3 = 512$; 2) $43^3 = 79\,507$. **5.48.** 1) $7^4 = 2401$; 2) $264^2 = 69\,696$. **5.49.** $333^3 = 36\,926\,037$. **5.50.** 3. **5.51.** 20 %. **5.52.** 60 кг, 20 кг. **5.53.** 1) 3,8; 2) корней нет. **5.54.** a — отрицательное число, b — положительное число, $c = 0$. **6.24.** 2) 2^5; 3) 2^{2n}; 4) 2^{n+1}. **6.41.** 1) 36; 2) 125; –125. **6.44.** Да. *Указание*. Рассмотрите произведение a^6b^6. **6.45.** 5^{97}. **6.46.** 2^{171}. **6.47.** 1) 6; 2) 1; 3) 4 или 6; 4) 1, или 3, или 7, или 9; 5) 8. **6.48.** 1) 1; 2) 1; 3) 1 или 9; 4) 9. **6.49.** 1) *Указание*. Последней цифрой степени 17^8 является 1; 2) *Указание*. Последней цифрой степени 64^{64} является 6; 3) *Указание*. Последней цифрой степени $3^{4n} = 81^n$ является 1. **6.50.** 1) *Указание*. Последней цифрой степени 4^{40} является 6; 2) *Указание*. Последней цифрой степени 2004^{171} является 4, а степени 171^{2004} — 1. **6.51.** $171 = \frac{(171^9)^9}{(171^8)^{10}}$.

6.53. Существует, например $2^{15} \cdot 3^{20} \cdot 5^{24}$. **6.54.** 2) $31^{11} < 17^{14}$. *Указание.* $31^{11} < 32^{11} = 2^{55} < 2^{56}$. **6.55.** $48^{25} < 49^{25} = 7^{50} < 7^{51} = (7^3)^{17} = 343^{17} < 344^{17}$. **6.56.** 6. *Указание.* Имеем: $\frac{1}{5^{100}} = \frac{2^{100}}{5^{100} \cdot 2^{100}} = \frac{2^{100}}{10^{100}}$. Следовательно, искомая цифра равна последней цифре значения выражения 2^{100}. **6.57.** Да. Например, $2^7 \cdot 3^4$, $2^6 \cdot 3^5$, $2^5 \cdot 3^6$, $2^4 \cdot 3^7$. **6.58.** 12 уток. **6.59.** 3,6 ч. **6.60.** 9,6 км. **6.61.** 1) 2; 2) корнем уравнения является любое число. **6.62.** *Указание.* Данное число можно представить в виде $1000a + a = 1001a$. **7.24.** 3) –43,2. **7.25.** 3) $-\frac{32}{27}$. **7.26.** 2) 24,5; 3) 30. **7.27.** 2) 1350; 3) –486. **7.28.** 600. **7.29.** 36 гусей. **8.11.** 600 г, 400 г. **8.12.** 300 вариантов. **9.6.** 3) 5; 4) корней нет. **9.7.** 2) 6; 3) корнем уравнения является любое число. **9.10.** 1) –45; 2) 24. **9.11.** 1) 11; 2) $\frac{2}{3}$. **9.26.** 5. **9.34.** –9 при $x = 0$. **9.35.** 4 при $y = 0$. **9.39.** 1) $\overline{abc} + \overline{bca} + \overline{cab} = 100a + 10b + c + 100b + 10c + a + 100c + 10a + b = 111a + 111b + 111c = 111(a + b + c)$. **9.40.** *Указание.* Рассмотрите сумму данных многочленов. **9.43.** *Указание.* $(177m + 179n) - 171(m + n) = 2(3m + 4n)$. **9.44.** 100, 101, 102. *Указание.* $(a - b + 101) + (b - c + 101) + (c - a + 101) = 303$. **9.45.** Меньше на 4 %. **9.46.** 4 ч. **9.47.** 144 дерева. **9.48.** 10 км. **10.7.** 1) –2; 2) –5; 3) –0,5; 4) корнем уравнения является любое число; 5) корней нет; 6) 4. **10.8.** 1) 2; 2) 0; 3) 6. **10.20.** 1) $7b^2$; 2) 0. **10.21.** $-\frac{3}{7}$. **10.22.** 8 см. **10.23.** 64 см. **10.24.** 36 км, 42 км, 30 км. **10.25.** 22 детали, 34 детали, 24 детали. **10.26.** 1) $x^{n+5} - x^{n+1}$; 2) $x^{n+4} - x^{2n+2} + x^n$. **10.27.** 1) $5x^{n+1}$; 2) $x^{2n+2} - 7x$. **10.28.** *Указание.* Из условия следует, что $a = 3n + 1$, $b = 9m + 7$, где m и n — натуральные числа. **10.30.** Не существуют. *Указание.* Следует заметить, что $a(b - c) + b(c - a) + c(a - b) = 0$. Это означает, что $a(b - c) = b(c - a) = c(a - b) = 0$. **10.31.** 20 га, 12 га, 14,4 га. **10.32.** 210 страниц. **10.34.** 90 км. **10.35.** 8 дней. **11.7.** 1) –7; 2) –2; 3) 1; 4) –1; 5) корней нет. **11.8.** 1) 2; 2) $-\frac{2}{27}$; 3) 6; 4) корнем уравнения является любое число. **11.14.** 6; 7; 12; 14. **11.15.** 8; 12; 18. **11.16.** 7; 8; 9; 10. **11.17.** 16; 17; 18. **11.18.** 15 см. **11.19.** 18 см, 12 см. **11.20.** 14 см, 12 см. **11.35.** Нельзя. *Указание.* После каждого шага получаем многочлен, который при $x = -1$ принимает значение, кратное 3. Многочлен $x^3 + 2$ таким свойством не обладает. **11.36.** 1. *Указание.* Сумма коэффициентов многочлена с одной переменной x равна значению многочлена при $x = 1$. **11.37.** 15 деталей, 11 деталей. **11.38.** 9 %. **11.39.** 1) 3; 2) 9. **11.41.** 60 лет. **12.15.** 1) $-a(a + b)(2a + 3b)$; 2) $3m(m - 8)(3m - 16)$; 3) $(a + 5)(3a + 2)$; 4) $(4y - 1)(x - 3)$; 5) $(5m - n)^2(m +$

$+ 8n)^2(4m - 9n)$. **12.16.** 1) $(x - 6)(x + 4)$; 2) $(x^2 - 2)(2y - 7)$; 3) $(4a - 3b)(3a + 7b)$; 4) $(p - 9)^3(2p + 1)^3(3p - 8)$. **12.17.** 1) -7; 2) 2; $2\frac{2}{3}$; 3) 5; -40; 4) 7; 14. **12.18.** 1) -6; 9; 2) 10; -6; 3) $-\frac{1}{3}$; $\frac{1}{9}$; 4) $1\frac{1}{3}$; 1. **12.19.** 7) $49a^2(1 + 2b)^2$; 8) $81c^{12}(c - 2)^4$. **12.20.** 5) $64x^2y^2(2x + 5y)^2$; 6) $32x^{10}(11x^2 - 14y^3)^5$. **12.23.** 1. *Указание*. $9^{108} + 9^{109} = 9^{108}(9 + 1) = 9^{108} \cdot 10$. Следовательно, искомая цифра равна последней цифре числа 9^{108}. **12.26.** 1) 0; $\frac{3}{8}$; 2) 0; 0,4; 3) 0; $-0,2$; 4) 0; 3,6. **12.27.** 1) 0; 6; 2) 0; $\frac{1}{3}$. **12.28.** 1) $2a + 4$; 2) $6ab - 4b$; 3) $8ab^2 - 14b^3$. **12.29.** 1) $2a^2b^2$; 2) $2ab + 2b^2$. **12.32.** 1) $a^n(a + 1)$; 2) $b^{n-3}(b^3 - 1)$; 3) $c^{n-4}(c^6 + 1)$; 4) $d^n(d^n - 1)$; 5) $2^{n+1} \cdot 5$; 6) $3^{n+2}(3^n + 1)$. **12.33.** 1) $a^n(a^2 - 1)$; 2) $b^n(3b^2 - 2b + 1)$; 3) $2^{5n}(1 + 2^{3n+4})$. **12.34.** 2) 24; 3) 20. **12.35.** 2) -4; 3) -12. **12.36.** 1) 1; 2) 0,8; 3) 5. **12.37.** 1) $a = 3$; 2) $a = -\frac{2}{3}$. **12.38.** 9. *Указание*. Сложите данные равенства. **12.39.** 18. *Указание*. Пусть данное число $\overline{ab}$. Тогда $\overline{ab} = 10a + b = (a + 1)(b + 1)$, отсюда $9a = ab + 1$, $a(9 - b) = 1$. Отсюда $a = 1$, $b = 8$. **12.40.** 13. *Указание*. $6x^2 - 2x + 7 = 2(3x^2 - x) + 7$. **12.41.** 24. *Указание*. $x^4 - 7x^3 - 35x - 1 = x^2(x^2 - 7x) - 35x - 1$. **12.42.** *Указание*. Данное выражение равно $11\,111(100\,001 - 2) = 11\,111 \cdot 99\,999 = 9(11\,111)^2$. **12.43.** $m = 8$, $n = 4$. *Указание*. Имеем: $2^m(2^{m-n} - 1) = 16 \cdot 15$. **12.45.** 20 кг. **12.46.** 28 банок. **12.48.** Нет. **13.7.** 1) 15; 2) 72; 3) 25. **13.8.** 1) 250; 2) -1. **13.11.** 1) $(a^n + 1)(a + 1)$; 2) $(b + 1)(b^{n+1} - 1)$; 3) $(y^{n+1} - 1)(3y^2 + 5)$. **13.13.** 1) $(x + 6)(x + 2)$; 2) $(x - 4)(x - 1)$; 3) $(x - 1)(x + 8)$; 4) $(x + 1)(x - 5)$. **13.14.** 1) $(x + 1)(x + 3)$; 2) $(x - 2)(x - 8)$; 3) $(x + 6)(x - 3)$; 4) $(x - 8)(x + 4)$. **13.15.** *Указание*. $n^3 + 3n^2 + 2n = n(n^2 + 3n + 2) = n(n^2 + n + 2n + 2) = n(n(n + 1) + 2(n + 1)) = n(n + 1)(n + 2)$. **13.16.** *Указание*. $3^{n+2} - 2^{n+2} + 3^n = 3^n(3^2 + 1) - 2^n(2^2 + 1) = 3^n \cdot 10 - 2^n \cdot 5 = 3^n \cdot 10 - 2^{n-1} \cdot 2 \cdot 5 = 3^n \cdot 10 - 2^{n-1} \cdot 10 = 10(3^n - 2^{n-1})$. **13.18.** 2. *Указание*. $2x^4 + 3x^2y^2 + y^4 + y^2 = 2x^4 + 2x^2y^2 + x^2y^2 + y^4 + y^2 = 2x^2(x^2 + y^2) + y^2(x^2 + y^2) + y^2$. **13.19.** 8. **13.20.** *Указание*. В рассматриваемое произведение вместо 1 подставьте $ab + bc + ac$. **13.21.** *Указание*. Воспользуйтесь тем, что $a = 1 - b - c$, $b = 1 - a - c$, $c = 1 - a - b$. **13.22.** 4 овцы. **13.24.** 6 ч. **13.25.** 40 л, 10 л. **14.12.** 5) $16a^4 - 1$; 6) $c^{12} - 625$. **14.13.** 4) $a^8 - 1$. **14.14.** 3) $y^{2n+4} - x^{8n}$; 4) $a^{2n+2} - b^{2n-2}$. **14.15.** 3) $4x^2 + 3x + 93$; 4) b^2c^5. **14.16.** 1) $x^2 - 4x + 19$; 2) b^{12}. **14.17.** 1) -1; 2) корней нет; 3) корнем уравнения является любое число; 4) $-25,6$. **14.18.** 1) -40; 2) -3. **14.23.** 1) 4; 2) 25; 3) 9; 4) -1. **14.24.** 1) 1; 2) 256. **14.26.** *Указание*. $253 \cdot 259 = (256 - 3)(256 + 3)$, $252 \cdot 260 = (256 - 4)(256 + 4)$. **14.28.** *Указание*. Умножьте и разделите выражение, стоящее в левой части равенства, на $1 + 2 + 2^2$. Далее воспользуйтесь тем, что $(1 + a^2 - a)(1 + a^2 + a) = (1 +$

$+ a^2 + a^4)$. **14.29.** *Указание*. Обозначим число 1001 буквой n. Тогда данное выражение принимает вид $(n-1)(n+1)(n^2+1)+1$. **14.30.** 14 км/ч, 42 км. **14.31.** 20 кг, 80 кг. **14.32.** 4 ч. **14.33.** $7^5 = 16\,807$ горстей, 1,34 т. **14.34.** 1) $-1\frac{4}{25}$; 2) $6\frac{1}{6}$. **15.10.** 1) –150; 2) 12,8. **15.11.** –40. **15.14.** 4) $(c^5 - y^3)(c^5 + y^3)(c^{10} + y^6)$. **15.15.** 1) $(a-b)(a+b)(a^2+b^2)(a^4+b^4)$; 2) $(a^2 - 2)(a^2+2)(a^4+4)(a^8+16)$. **15.16.** 1) 4; $-\frac{2}{3}$; 2) –1; –7; 3) –10; $-2\frac{2}{3}$; 4) $-1\frac{2}{7}$; $-\frac{1}{23}$. **15.17.** 1) $\frac{2}{11}$; $\frac{10}{11}$; 2) –16; $-\frac{3}{8}$. **15.21.** 1) $(2n+2)^2 - (2n)^2 = (2n + 2 - 2n)(2n+2+2n) = 2(4n+2)$. **15.23.** 43 и 34. **15.25.** 1) $b = 2$; 2) $b = -2$; 3) $b \neq 2$ и $b \neq -2$. **15.27.** $\frac{13}{24}$. *Указание*. Данное выражение равно $\frac{2^2-1}{2^2} \cdot \frac{3^2-1}{3^2} \cdot \frac{4^2-1}{4^2} \cdot \ldots \cdot \frac{12^2-1}{12^2}$. **15.28.** 8 км/ч. **15.29.** 45 кг. **15.30.** $a = -3$. **15.31.** 1) $-\frac{5}{8}$; 2) корнем уравнения является любое число. **15.32.** 1) $a > 0$; 2) $a \neq 0$; 3) a — любое число. **16.19.** 5. **16.20.** 1) 9; 2) –0,6; 4) –5. **16.21.** 1) $-\frac{1}{11}$; 3) 7. **16.22.** 7 см. **16.23.** 26 см. **16.24.** 12; 13; 14. **16.25.** 19; 20; 21; 22. **16.34.** 1. **16.35.** 0 или 1. **16.39.** 7. **16.40.** 3. **16.43.** $a = 1$. **16.44.** $a = -\frac{1}{6}$. **16.46.** Пусть n — третье из данных чисел, тогда данные числа равны соответственно $n-2$, $n-1$, n, $n+1$, $n+2$, где $n > 2$. Докажите, что сумма квадратов этих чисел равна $5(n^2+2)$. Чтобы полученный результат мог быть квадратом некоторого натурального числа, значение выражения $n^2 + 2$ должно быть кратным 5, т. е. его последней цифрой должна быть цифра 0 или цифра 5. Так как последней цифрой значения выражения n^2 может быть одна из цифр 0, 1, 4, 5, 6, 9, то значение выражения $n^2 + 2$ не может оканчиваться цифрой 0 или цифрой 5. **16.47.** 5000 т. **16.48.** 500 кг. **16.49.** Одинаковая. **16.52.** 2) Таких значений не существует; 3) $x = -1$. **17.11.** 1) $(4a-b)^2$; 2) $(6x+5y)^2$. **17.12.** 1) $(2m + 2n)^2$; 2) $(7x+4y)^2$. **17.13.** 1) 0,0016; 2) 10 000. **17.14.** 1) 10 000; 2) 9. **17.17.** 2) $-\frac{7}{9}$. **17.18.** 2) $\frac{3}{5}$. **17.22.** *Указание*. $x^2 - 14x + 52 = x^2 - 14x + 49 + 3 = (x-7)^2 + 3$. **17.24.** 1) 1 при $x = 3$; 2) 16 при $x = -\frac{3}{4}$; 3) $\frac{3}{4}$ при $x = -\frac{1}{2}$. **17.26.** 1) –8 при $x = 2$; 2) –1 при $x = \frac{1}{11}$; 3) –7 при $x = -\frac{7}{6}$. **17.28.** 1) 100 при $x = -8$; 2) 11 при $x = \frac{3}{4}$. **17.29.** 1) 4 при $x = 14$; 2) –50 при $x = -\frac{5}{3}$.

17.31. $(a-3b)(a-3b-4)+4=(a-3b)^2-4(a-3b)+4=(a-3b+2)^2$. **17.32.** 6) *Указание.* $2a^2+2b^2=(a^2+2ab+b^2)+(a^2-2ab+b^2)$. **17.33.** 1) $(a^2+4)^2+(3a)^2$; 2) $(x+y)^2+(3x)^2$; 3) $(x-3y)^2+(x-3)^2$; 4) $(x-5)^2+(y+7)^2$. **17.34.** 1) $x=-4$, $y=5$; 2) $x=-6$, $y=1$. **17.35.** 1) $x=-1$, $y=0{,}5$; 2) таких значений не существует. **17.36.** 45. **17.38.** 8. **17.39.** –10. **17.40.** *Указание.* После раскрытия скобок прибавьте и вычтите $2mn$. **17.42.** $24=12+12$. *Указание.* Пусть одно из слагаемых равно x, тогда второе равно $24-x$, а их произведение: $x(24-x)=24x-x^2=12^2-12^2+2\cdot12x-x^2=144-(12-x)^2$. **17.43.** 5 см, 5 см. **17.44.** 4. *Указание.* $b^2+\frac{a^2}{4}=b^2+\frac{a^2}{4}+ab-ab=\left(b+\frac{a}{2}\right)^2-ab$. **17.45.** 0. *Указание.* Данное в условии равенство представьте в виде $(a-b)^2+(b-c)^2+(a-c)^2=0$. **17.46.** 59. **17.48.** 2 или –2. *Указание.* $(a+b-c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab-2ac-2bc$. **17.49.** *Указание.* $a^2+b^2+3c^2+2ab+4ac+4bc=a^2+b^2+4c^2+2ab+4ac+4bc-c^2$. **17.51.** Существует, например $n=12$. **17.52.** *Указание.* Обозначим $1000=n$. Тогда данное выражение принимает вид $n^2+n^2(n+1)^2+(n+1)^2$. Покажите, что полученное выражение тождественно равно $(n^2+n+1)^2$. **17.53.** *Указание.* Обозначим $1002=n$. Тогда данное выражение принимает вид $(n-3)(n-1)(n+1)(n+3)+16$. Покажите, что полученное выражение тождественно равно $(n^2-5)^2$. **17.54.** *Указание.* $x^4-x+\frac{1}{2}=x^4-x^2+\frac{1}{4}+x^2-x+\frac{1}{4}$. **17.55.** *Указание.* $x^4-4x+5=x^4-4x+5+4x^2-4x^2$. **17.56.** 1. *Указание.* $n^2+2n+1\leqslant n^2+3n<n^2+4n+1$, т. е. $(n+1)^2\leqslant n^2+3n<(n+2)^2$. Если выполняется строгое неравенство $(n+1)^2<n^2+3n<(n+2)^2$, т. е. значение выражения n^2+3n находится между квадратами двух последовательных натуральных чисел, то значение этого выражения не может быть квадратом натурального числа. Остаётся рассмотреть случай, когда $(n+1)^2=n^2+3n$. **17.57.** 8. *Указание.* $n(n+8)+16=(n+4)^2$. Значение выражения $(n+4)^2$ оканчивается на 0 и является точным квадратом. Следовательно, предпоследняя цифра его значения тоже 0. **17.58.** 100 км. **17.59.** 60 га, 40 га. **17.61.** 13. **17.62.** 420 дней. *Указание.* Чтобы узнать, через сколько дней рыбаки снова соберутся на озере вместе, надо найти НОК (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7). **18.11.** 1) 9; 2) $25x-64$; 3) $-6a^2+9a-27$; 4) $a^{24}-1$. **18.12.** 1) –124; 2) $-y^2+3y-36$; 3) a^6-b^6. **18.14.** 2) 0,5; 3) –1; 4) 8. **18.15.** 2) 6; 3) –5. **18.21.** *Указание.* Пусть данные числа равны $2n-1$ и $2n+1$. **18.22.** *Указание.* Эти числа можно представить в виде $3n+1$ и $3n+2$, где n — произвольное натуральное число. **18.23.** 1. *Указание.* $x^6+3x^2y^2+y^6=(x^2+y^2)(x^4-x^2y^2+y^4)+3x^2y^2$. **18.24.** 8. **18.27.** *Указание.* Поскольку $c=-(a+b)$, то достаточно доказать, что $a^3+b^3-(a+b)^3=$

$= -3ab(a + b)$. Другое решение можно получить, если воспользоваться результатом задачи 11.34. **18.29.** 18 кг; 6 кг. **18.30.** 2. **19.11.** 1) 2; 2) $-\frac{1}{6}$; 3) $-\frac{2}{3}$. **19.12.** 1) –3; 2) $\frac{1}{5}$; 3) $-\frac{3}{4}$. **19.14.** 1) *Указание*. $x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + 2y^3 = (x + y)^3 + y^3$. **19.16.** 1. **19.17.** 5. **19.18.** 4. **19.19.** *Указание*. Пусть $1002 = a$. Тогда $1004 = a + 2$, $1003 = a + 1$, $1001 = a - 1$. Теперь достаточно доказать тождество $a(a + 2)^3 - (a + 1)(a - 1)^3 = (2a + 1)^3$. **20.19.** 6) –2; –3; 3; 7) 5; 8) –1; 1. **20.20.** 5) –1; 1; 6) –5; 5; 4. **20.25.** 1) $(x - y + 4)(x + y - 2)$; 2) $(2a - 3b - 3)(2a + 3b + 1)$. **20.26.** 1) $(5x - y^2 + 4)(5x + y^2 - 10)$; 2) $4(3m - 2n + 3)(3m + 2n - 2)$. **20.27.** 4) $(2a - 5)(2a - 1)$; 5) $(3x - 7y)(3x - y)$; 6) $3(2m - n)(6m - 7n)$. **20.28.** 4) $(x + 3)(x - 2)$; 5) $(c + 3d)(c + 5d)$; 6) $(3x - 8y)(3x - 2y)$. **20.29.** 1) –40; 2) 74; 3) 84; 4) 632. **20.30.** 1) 54; 2) 48; 3) 1746. **20.33.** Неверно. *Указание*. Рассмотрите разность левой и правой частей равенства. **20.34.** 1) *Указание*. $x^2 + 2x - 9y^2 + 12y - 3 = x^2 + 2x - 9y^2 + 12y + 1 - 4 = (x^2 + 2x + 1) - (9y^2 - 12y + 4) = (x + 1)^2 - (3y - 2)^2$. **20.36.** 5) *Указание*. $m^5 + m^4 + 1 = m^5 + m^4 + m^3 - m^3 + 1$; 6) $(x - 1)(x + 1)(x^2 + 1)(x^4 + 2)$. **20.37.** 5) *Указание*. $x^8 + x^7 + 1 = x^8 + x^7 + x^6 - x^6 - x^5 - x^4 + x^5 + x^4 + x^3 - x^3 + 1$. **20.38.** 1) $(x - 1)(x + 1)(x - 2)(x + 2)$; 2) $(x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1)$; 3) $(2x^2 - 4x + 1)(2x^2 + 4x + 1)$. *Указание*. $4x^4 - 12x^2 + 1 = (4x^4 + 4x^2 + 1) - 16x^2$; 4) $(x^2 + 3)(x^2 + 6)$. *Указание*. $x^4 + 9x^2 + 18 = x^4 + 6x^2 + 9 + 3x^2 + 9$; 5) $(x^2 - 2x + 2)(x^2 + 2x + 2)$. *Указание*. $x^4 + 4 = x^4 + 4x^2 + 4 - 4x^2$. **20.39.** 1) $(x^2 - x + 3)(x^2 + x + 3)$; 2) $(x^2 - 2x - 2)(x^2 + 2x - 2)$. **20.42.** 14, 18, 22. **20.43.** 13 км. **20.44.** 2) –2; 2; –18; 18; 3) –18; 2; 4) 4. **21.5.** 3) *Указание*. $5 \cdot 25^n + 13 \cdot 13^{2n} = 5^{2n+1} + 13^{2n+1}$; 4) *Указание*. $21^n + 4^{n+2} = 21^n - 4^n + 17 \cdot 4^n$. **21.8.** 1) *Указание*. $2^{1234} + 1 = (2^2)^{617} + 1$. **21.9.** 1) *Указание*. Умножьте выражения, записанные в обеих частях равенства, на выражение $x - 1$. **21.10.** 1) 3^{100}. *Указание*. Умножьте данное выражение на $3 - 2 = 1$; 2) $\frac{4^{21} + 3^{21}}{7}$. **21.11.** $a = 2$. **21.13.** *Указание*. Перепишите данное выражение так: $(1^{101} + 30^{101}) + (2^{101} + 29^{101}) + \ldots + (15^{101} + 16^{101})$. **21.14.** 1) 0; 2) 0; –1. **21.15.** 1) *Указание*. $7 \cdot 5^{2n} + 12 \cdot 6^n = 7 \cdot 25^n + 12 \cdot 6^n = 7 \cdot 25^n - 7 \cdot 6^n + 19 \cdot 6^n$.

Глава 3. **22.8.** 2) $\{-2, 2\}$; 4) $\varnothing$. **22.9.** 4) $\{5\}$. **23.20.** Да. Множество натуральных чисел. **23.35.** $a = 3$. **23.36.** 420 человек. **24.23.** $S(x) = 40(40 - x)$. Область определения: множество чисел, удовлетворяющих неравенству $0 < x < 40$. **24.24.** $V(x) = (100 - 2x)^2 \cdot x$. Область определения: множество чисел, удовлетворяющих неравенству $0 < x < 50$. **24.31.** 12, 22, 32. **24.33.** *Указание*. Сложите левые и правые части данных равенств. **25.20.** $y = 4x + 1$. **25.21.** $y = x^3 + x$. **25.25.** Рисунок 1. **25.26.** Рисунок 2.

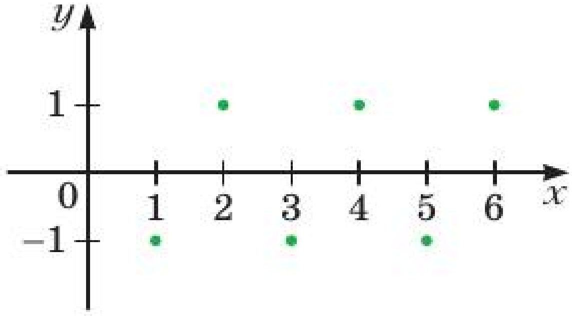


Рис. 1

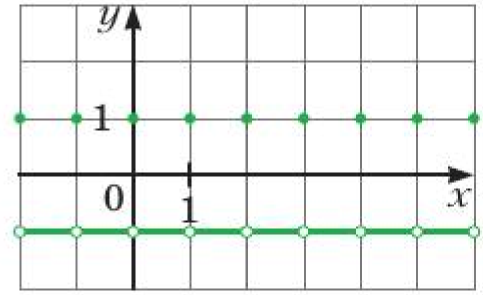


Рис. 2

25.31. 15 пчёл. **26.25.** $A\left(\frac{4}{3}; -\frac{4}{3}\right)$. **26.26.** 1) (–10; –27); 2) (–14; 8). **26.27.** (3; 5). **26.32.** 1. **26.33.** 3. **26.34.** $k = 0{,}5$, $b = 4$. **26.35.** $k = \frac{1}{3}$, $b = -1$. **26.40.** 1) n; 2) k; 3) m; 4) p. **26.43.** $k = -1$. **26.44.** $b = 11$. **26.51.** 1) $y = x + 3$; 2) $y = -0{,}5x - 1$. **26.52.** 1) $y = -\frac{2}{3}x$; 2) $y = 2x - 4$. **26.54.** Не могут. *Указание*. Рассмотрите значения данных функций при $x = 1$. **26.55.** *Указание*. Из рисунка видно, что $k + b = 0$. Это значит, что график функции $y = bx + k$ пересекает ось ординат в точке $(0; -b)$. **26.56.** Можно. *Указание*. Покажите, что при любом k графики пересекаются в точке $M(-1; 2)$. **26.58.** 1) –39; 2) –12. **26.59.** 1) $\frac{5}{8}$; 2) 1,4. **26.60.** *Указание*. Пусть второе из этих чисел равно n, тогда первое число будет равно $n - 1$, а третье — $n + 1$. Разложите на множители сумму кубов первого и третьего чисел. **26.62.** $a^2 - b^2$. *Указание*. $x^4 + x^2y^2 + y^4 = x^4 + 2x^2y^2 + y^4 - x^2y^2 = (x^2 + y^2)^2 - x^2y^2$. **26.63.** Из определения модуля следует, что $|x| \geqslant x$, поэтому $|x| - x \geqslant 0$. Вместе с тем $2x - x^2 - 2 = -x^2 + 2x - 1 - 1 = -(x - 1)^2 - 1 < 0$.

Глава 4. **27.9.** 2. **27.10.** 6. **27.13.** 3) (–3; 0); (3; 0); (0; –3); (0; 3); 4) (5; 0); (–5; 0); (0; –5). **27.28.** (3; 3). **27.29.** (4; –4). **27.30.** 1) (1; 1); 2) (1; 3); (6; 2); (11; 1). **27.33.** 3 способа. **27.34.** 9 задач по алгебре и 2 по геометрии, или 6 задач по алгебре и 4 по геометрии, или 3 задачи по алгебре и 6 по геометрии. **27.35.** 1) (0; 2); 2) (–1; 3); 3) (–0,5; –0,5); 4) решений нет. **27.36.** 1) (5; –5); 2) решений нет. **27.37.** (0; 0); (–1; 0); (1; 0); (0; –2). **27.38.** (0; 4); (0; –4); (5; 0); (–5; 0). **27.39.** 5 %. **27.40.** 20 яблок. **27.41.** 1) 6; 2) –5. **27.42.** 269,5 км. **27.44.** 1) 12; 2) $-\frac{16}{3}$. **28.37.** –12. **28.38.** –4. **28.39.** $a = -4$, $b = 2$. **28.40.** $a = 7$, $b = -3$. **28.43.** 1) d; 2) c; 3) b; 4) a. **28.44.** 1) $y = 0{,}5x + 2$; 2) $y = 0{,}6x - 3$. **28.45.** $x + y = 6$. **28.50.** 1 пара (3; 2). **28.53.** 1) 5; 2) 3,5. **28.54.** 2) $(x - 3y - 4)(x - 3y + 4)$; 4) $(c - b - 3)(c + b + 1)$. **29.8.** 1) $a = 3$, $b = -2{,}5$; 2) $a = 4$, $b = -6$. **29.9.** $a = 2$, $b = 5$. **29.14.** При $a \neq 7$.

29.15. 1) 16; 2) –5. **29.16.** 1) При $a \neq 14$; 2) при $a = -10$. **29.19.** 1) (–2; 2); 2) (–2; 2); (1; 1); 3) решений нет; 4) (1; –1); (3; 3). **29.20.** 1) (1; 1); (–3; 3); 2) (2; 1); (–2; –1); 3) (2; 0); (–2; 0); (0; 2); (0; –2). **29.21.** 3 кг. **29.22.** 60 км/ч. **29.23.** 3; 5; 7; 9. *Указание*. Обозначьте наименьшее из этих чисел $2k - 3$, где k — произвольное натуральное число, большее 1. **30.3.** 1) (6; 3); 2) (4; 2); 3) (1; 2); 4) (4; –3); 5) (–5; –7); 6) (1,2; –0,7). **30.4.** 1) (–5; 20); 2) (–1; 3); 3) (–2; –1); 4) (–3; 4). **30.5.** 1) (0; –6); 2) (8; 6); 3) (–5; –4); 4) (4; –3). **30.6.** 1) (1; –1); 2) (–2; 0,5); 3) (14; 2). **30.7.** 3 %. **30.9.** $2^{4n} - 1 = (2^4)^n - 1 = 16^n - 1$. Последней цифрой степени 16^n является 6. Тогда последней цифрой данного выражения является 5. **31.3.** 1) (8; 1); 2) (1,2; 0); 3) (–1; –2); 4) (7; –1); 5) (4; –1); 6) (6; –2); 7) (2; –2); 8) (5; 6). **31.4.** 1) (1; 2); 2) (3; –1); 3) (4; 2); 4) (6; 5); 5) (1,5; 0,5); 6) (1; –1). **31.5.** 1) (–3; –4); 2) (1; –0,5); 3) $\left(5\frac{3}{4}; -\frac{3}{8}\right)$; 4) (2; –2). **31.6.** 1) (–0,6; –3,2); 2) (1; 3). **31.7.** 1) (1; 1); 2) (–3; 3). **31.8.** 1) (–20; –0,5); 2) (–2; 3). **31.9.** 1) $\left(-\frac{1}{7}; 2\frac{3}{7}\right)$; 2) (–10; 5). **31.10.** 1) (–5; –6); 2) (1; –6). **31.11.** $a = 5{,}6$, $b = 0{,}8$. **31.12.** $m = 9$, $n = -12$. **31.13.** 1) $y = -0{,}2x + 1{,}4$; 2) $y = -x + 1$. **31.14.** 1) $y = -0{,}5x + 3{,}5$; 2) $y = 3x + 3$. **31.16.** 1) (3; –1,6); 2) решений нет. **31.19.** –0,8. **31.20.** 2. **31.21.** 1) (3; –3); 2) (1,5; 0,75); 3) $\left(4; -\frac{2}{3}\right)$; 4) (–5; 6); 5) (–2,4; –4). **31.22.** 1) (10; 5); 2) (0,5; 1,5); 3) (–8; –28). **31.23.** 1) (0,2; 1); 2) (1; –1). **31.24.** 1) $\left(\frac{1}{20}; \frac{1}{2}\right)$; 2) (2; –2). **31.25.** 1) 6; 2) –2,5. **31.26.** 9 задач. **31.27.** 2 ч. **31.29.** 96 деревьев. **32.3.** 63 аршина синего сукна и 75 аршин чёрного. **32.4.** 7 четырёхместных лодок и 3 шестиместных. **32.5.** 9 кг, 7 кг. **32.6.** 8 га, 6 га. **32.7.** 9 деталей, 6 деталей. **32.8.** 4 ц, 5 ц. **32.9.** 140 р., 120 р. **32.10.** 15 р., 18 р. **32.11.** 58 км/ч, 70 км/ч. **32.12.** 60 км/ч, 40 км/ч. **32.13.** 4 км/ч, 16 км/ч. **32.14.** 84 км/ч, 79 км/ч. **32.15.** 80 л, 60 л. **32.16.** 28 пассажиров, 36 пассажиров. **32.17.** 18 км/ч, 2 км/ч. **32.18.** 25 км/ч, 2,5 км/ч. **32.19.** 5 мешков, 7 мешков. **32.20.** 40 рупий, 170 рупий. **32.21.** 42 года, 15 лет. **32.22.** 60 лет, 12 лет. **32.23.** 45 костюмов, 30 костюмов. **32.24.** 600 р., 900 р. **32.25.** 30 р., 40 р. **32.26.** 100 р., 40 р. **32.27.** 12 000 р., 9000 р. **32.28.** 18 000 р., 12 000 р. **32.29.** $a = 120$, $b = 100$. **32.30.** 12; 15. **32.31.** 100 кг, 200 кг. **32.32.** 20 кг, 30 кг. **32.33.** 87. **32.34.** 6 см, 8 см. **32.35.** 5 см, 7 см. **32.36.** 3 км/ч, 12 км/ч. **32.37.** 5 км/ч, 4 км/ч. **32.38.** 12 км/ч. **32.39.** 60 т. **32.40.** 50 км/ч, 75 км/ч, 90 км/ч, 450 км. **32.41.** 48 км/ч, 60 км/ч. **32.42.** 48 км/ч, 16 км/ч. **32.43.** 320 г, 480 г. **32.44.** 63 кг, 15 кг. **32.45.** 72. **32.46.** 39. **32.47.** 24 л, 40 л. **32.48.** 28 л, 42 л. **32.49.** 1) Такого числа не существует; 2) любое двузначное число, у которого цифра десятков на 2 больше цифры единиц, на 18 больше числа, записанного теми же цифрами, но в обратном порядке. **32.50.** 8 косарей. **32.56.** $a^2 = c + 2b$. **32.57.** 7,5. **32.59.** 8.

Глава 5. **33.1.** 16 способов. **33.2.** 15 отрезков. **33.3.** 1) 8; 2) 4. **33.4.** $4 \cdot 3$. **33.5.** $3 \cdot 6 \cdot 5$. **33.6.** 1) $4 \cdot 2$; 2) $4 \cdot 3$. **33.7.** 1) 6; 2) 2. **33.8.** 100. **33.9.** 20. **33.10.** 25. **33.11.** 8. **33.12.** 6^3. **33.13.** 16. **33.14.** $32 \cdot 24$. **33.15.** 3600. **33.16.** 1800. **33.17.** $11 \cdot 9 + 8 \cdot 7$. **33.18.** $5^5 + 4 \cdot 5^4$. **33.22.** 2) $(b^3 - 2b^2 + 3)(b^3 + 2b^2 - 3)$; 4) $(3x - 7)(3x + 5)$.

Алфавитно-предметный указатель

Оглавление

Квадраты и кубы натуральных чисел от 1 до 10

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
n^2	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100
n^3	1	8	27	64	125	216	343	512	729	1000

Степени чисел 2 и 3

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2^n	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024
3^n	3	9	27	81	243	729	2187	6561	19 683	59 049

Свойства степени с натуральным показателем

$$a^m a^n = a^{m+n}$$
$$(a^m)^n = a^{mn}$$
$$a^m : a^n = a^{m-n} \ (a \neq 0,\ m > n)$$
$$(ab)^n = a^n b^n$$

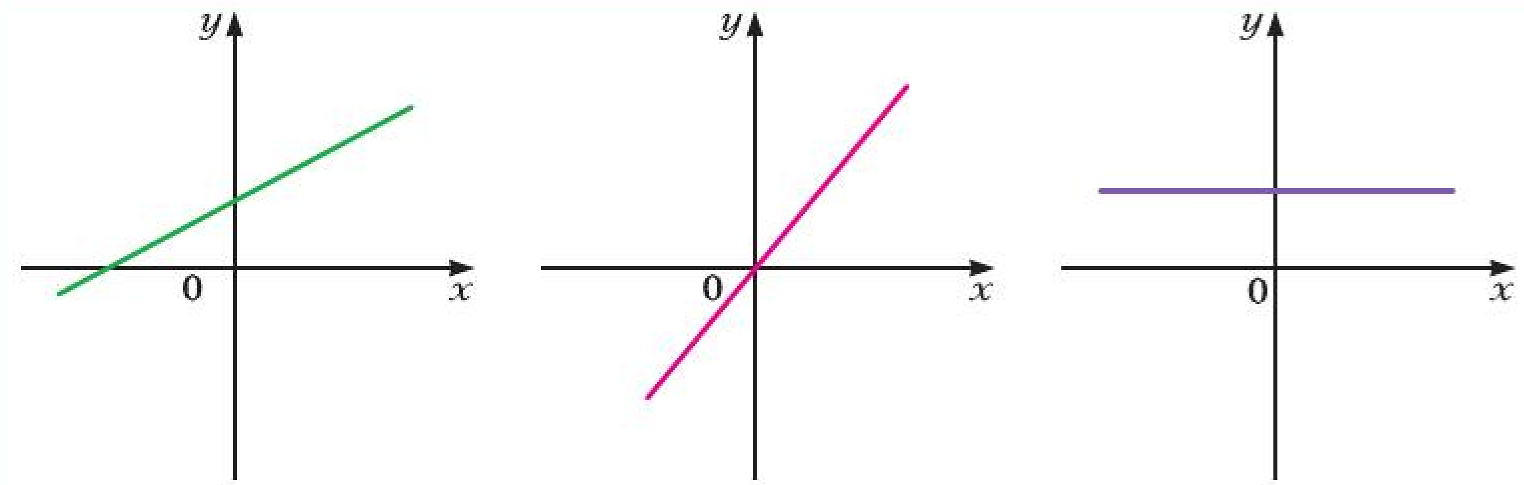
Формулы сокращённого умножения

$$(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$$
$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$
$$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$$
$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$$
$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$$
$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$
$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$
$$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \ldots + ab^{n-2} + b^{n-1})$$
$$a^n + b^n = (a+b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 - \ldots - ab^{n-2} + b^{n-1})$$

Таблица квадратов натуральных чисел от 10 до 99

Десятки	Единицы									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	100	121	144	169	196	225	256	289	324	361
2	400	441	484	529	576	625	676	729	784	841
3	900	961	1024	1089	1156	1225	1296	1369	1444	1521
4	1600	1681	1764	1849	1936	2025	2116	2209	2304	2401
5	2500	2601	2704	2809	2916	3025	3136	3249	3364	3481
6	3600	3721	3844	3969	4096	4225	4356	4489	4624	4761
7	4900	5041	5184	5329	5476	5625	5776	5929	6084	6241
8	6400	6561	6724	6889	7056	7225	7396	7569	7744	7921
9	8100	8281	8464	8649	8836	9025	9216	9409	9604	9801

График линейной функции $y = kx + b$



$k \neq 0,\ b \neq 0$ $k \neq 0,\ b = 0$ $k = 0,\ b \neq 0$

График функции $y = |x|$

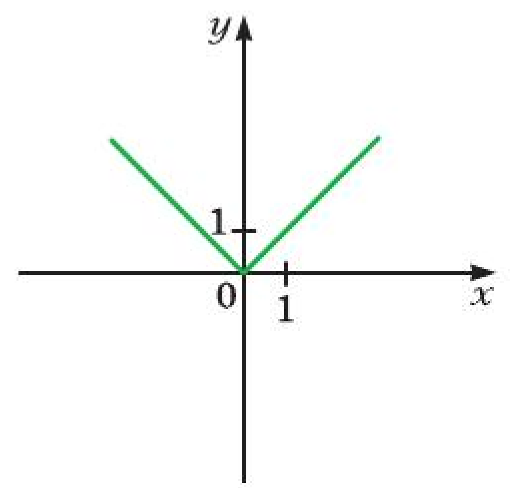
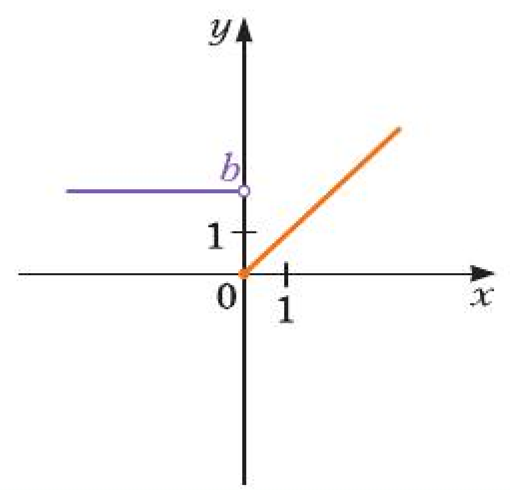
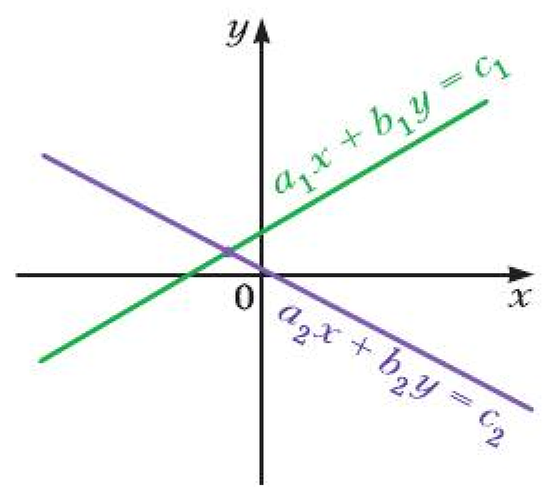


График функции $y = \begin{cases} x, \text{если } x \geqslant 0, \\ b, \text{если } x < 0 \end{cases}$

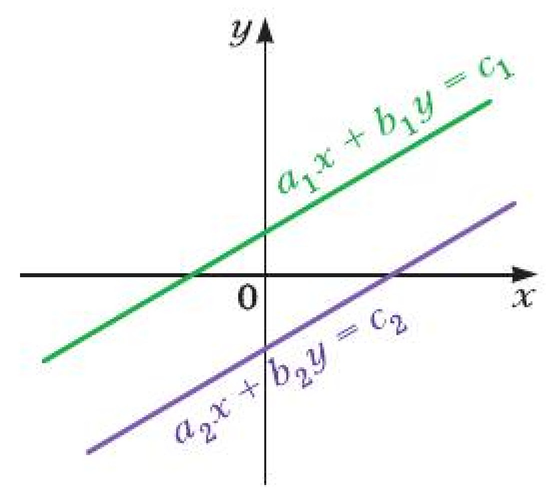


Количество решений системы двух линейных уравнений с двумя переменными

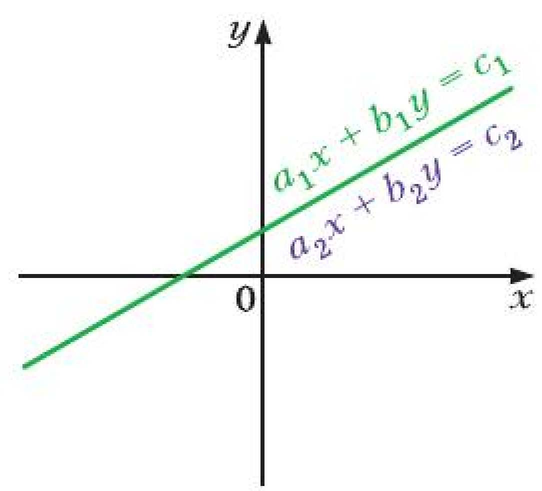
Система $\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1, \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$



1) имеет одно решение



2) не имеет решений



3) имеет бесконечно много решений